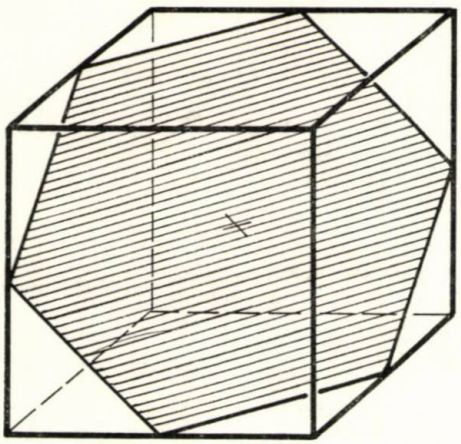
A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1983. február * XXX. évfolyam 1 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

82-5454 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta
Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Hódi Endre: 30 éves A Matematika Tanítása 1
Előd Istvánné: Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül? ... 3
Novák Lászlóné: Beszámoló az Úttörő-matematikusok 1982. évi vetélkedőjének országos fordulójáról ... 4
Dr. Hack Frigyes: Személyi számítógépek az iskolában és a tanárképzésben ... 13
Bencze Mihály: Összegekről ... 18
Kamarás Lajos—Póla József: Beszámoló a tanárképző főiskolák hallgatóinak 1982. évi matematikai tanulmányi versenyéről. II. ... 20
Gádor Endréné: Beszámoló a CIEAEM (A Matematika Tanításának Tanulmányozására és Jobbá Tételére Alakult Nemzetközi Bizottság) 1982. évi találkozójáról 23

FELADATOK ... 27

СОДЕРЖАНИЕ

Ходи Эндре: Нашему журналу — 30 лет 1
Элёд Иштванне: Что издано до сих пор из учебных программ, учебников и сопровождающих пособий для начальной и средней школы? ... 3
Новак Ласлоне: О всевенгерском туре соревнования математиков-пионеров 1982. г. ... 4
Д-р Хак Фридеш: Персональные ЭВМ в школе и подготовке учителей ... 13
Бенце Михай: О суммах ... 18
Камараш Лайош—Пола Йожеф: О математическом соревновании 1982 г. студентов педагогических институтов (II часть) ... 20
Гадор Эндрене: Сообщение о Совещании ЦИЕАЕМ — 1982. г. (МКИУПМ — Международная комиссия по изучению и усовершенствованию преподавании математики) ... 23

ЗАДАЧИ ... 27

INHALT

Hódi, Endre: Unsere Zeitschrift ist 30 Jahre alt ... 1
Frau Ilona Előd (geb.: *Bakos*): Was sind aus den neuen Mathematik-Lehrplänen der Grund- und Mittelschulen und aus den zugehörigen Dokumenten bisher erschienen? ... 3
Frau Borbála Novák (geb.: *Kapczár*): Bericht über die Landesrunde des Wettstreites der Pionier-Mathematiker im Jahre 1982 ... 4
Dr. Hack, Frigyes: Personal computers (Mikroprozessoren) in der Schule und in der Lehrerausbildung ... 13
Bencze, Mihály: Über gewiße Summen ... 18
Kamarás, Lajos—Póla, József: Bericht über den mathematischen Wettbewerb der Studenten der Pädagogischen Hochschulen im Jahre 1982. II. Teil ... 20
Frau Piroska Gádor (geb.: *Kurtág*): Über die Zusammenkunft der CIEAEM (Internationalen Kommission für das Studium und die Verbesserung des Mathematikunterrichts) im Jahre 1982 ... 23

AUFGABEN ... 27

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

1983. ÉVI XXX. ÉVFOLYAMÁNAK TARTALMA

A Bolyai János Matematikai Társulat által a matematikatanárok számára rendezett 1982. évi verseny eredménye 2/60
A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára 3/89
Bencze Mihály: Összegekről 1/18
Dr. Berényi Zsuzsanna Ágnes: INTERKOMPUTO '82 ..... 5/156
Csánk István: A lap második felelős szerkesztője voltam 3/65
Cser Andor: 1907—1983 ..... 4/97
Darvasi Gyula: Egy versenyfeladat és a Hesse-féle alak 6/175
Előd Istvánné: Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül? 1/3
Fitos László: Pitagoraszi számnégyesek és szám *n*-esek 5/160
Gádor Endréné: Beszámoló a CIEAEM (A Matematika Tanításának Tanulmányozására és Jobbá Tételére Alakult Nemzetközi Bizottság) 1982. évi találkozójáról 1/23
Gádor Endréné: Harminc év múltán 2/33
Garádi János: Tájékoztató a Középiskolások 1982. évi Számítástechnikai Versenyéről I. 3/90
Garádi János: Tájékoztató a Középiskolások 1982. évi Számítástechnikai Versenyéről II. 4/112
Dr. Hack Frigyes: Személyi számítógépek az iskolában és a tanárképzésben 1/13
Hennyey Judit: SMYOZ — egy logikai játék I. 5/149
Hennyey Judit: SMYOZ — egy logikai játék II. 6/177
Hódi Endre: 30 éves A Matematika Tanítása 1/1
Kallós Károly: A húr függvénykapcsolatai 5/140
Kamarás Lajos—Póla József: Beszámoló a tanárképző főiskolák hallgatóinak 1982. évi matematikai tanulmányi versenyéről II. 1/20
Dr. Kántor Sándorné: A tanárképzés helyzete, problémái és fejlesztésének lehetőségei 4/117
Dr. Kárteszi Ferenc: Egy kombinatorikus geometriai feladat 5/144
Kobilárcsik György: Az aranymetszés tanításának egyik lehetősége a szakközépiskolákban 5/129
Dr. Koller Lászlóné: Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából (Kísérleti anyag, III. osztály 1. rész) 3/108
Dr. Kósa András: Az analízis alapvető fogalmainak konstruktív bevezetéséről 2/43
Könyvesbolt érdekes szolgáltatással 6/IV
Lehel Jenő: Feladatok a kombinatorikus geometriából 3/76
Lénárt István: Axiomatizálás a gömbfelületen 4/132
Lukács Ottó: Keresd a hibát! 2/49
Munkaközösség: Tanulók önálló feladatmegoldása számítógép segítségével 2/54
Novák Lászlóné: Beszámoló az Úttörő-matematikusok 1982. évi vetélkedőjének országos fordulójáról 1/4
Dr. Sárvári Józsefné: A PTK 1050 típusú zsebszámológép hasznosítása matematikaórákon az általános iskolákban 6/161
Dr. Scharnitzky Viktor: A Hajós György Versenyről 4/122
Dr. Scharnitzky Viktor: Matematikus Vándorgyűlés Szegeden 5/158
Schuster Gyula: Helyzetkép a gondolkodásra nevelés didaktikájáról 6/167
Sugár György: Számítógép-program iskolai órarend készítéséhez 5/148
Tóth László: A differenciált foglalkoztatás lehetőségei az 5. osztályos matematika-tanterv tanításában 2/33
Dr. Varga Tamás: A függvényfogalom előkészítése I. 3/66
Dr. Varga Tamás: A függvényfogalom előkészítése II. 4/100
FELADATOK 1/27, 2/60, 3/92, 4/124, 6/186

83-5188 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

HO[illegible]I ENDRE
osztályvezető
Országos Pedagógiai Intézet

30 éves A Matematika Tanítása

Azzal a számmal, amelyet a Kedves Olvasó a kezében tart, XXX. évfolyamába lépett ez a legnagyobb múltú módszertani lap: 1. száma 1953 augusztusában jelent meg mint az Oktatásügyi Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat lapja.

Dr. Kárteszi Ferenc — jelenleg már nyugállományban levő — egyetemi tanár írta a lap 1. számában olvasható Előszóban:

Az új folyóirat két középponti kérdéssel fog foglalkozni: 1. az iskolai anyag hátterét alkotó és az iskolai tananyaggal összefüggő matematikai kérdések; 2. az iskolai tananyag és annak oktatása körébe vágó kérdések. Természetesen mindaz a más is helyet kap, ami ugyan nem fér bele a mondott két fő kérdés körébe, de számot tarthat az olvasók általános érdeklődésére, és összeegyeztethető a folyóirat célkitűzéseivel.

Ugyanennek a számnak szerkesztőségi cikke többek között az alábbiakat tartalmazza:

Az új folyóirat célját és feladatát tehát a tanítás során felvetődő igények szabják meg. Foglalkoznia kell a matematika elvi-didaktikai kérdéseivel, a tanítás mindennapi gyakorlati problémáival, a tantervi anyag közvetlen elmélyítésére szolgáló szakmai kérdésekkel mind általános, mind középiskolai vonatkozásban. El kell érnie, hogy mindazok, akik matematikát tanítanak, állandó kapcsolatban legyenek a matematikával.

Ennek megfelelően lapunk állandó rovatai a következők:

1. Módszertani rovat. Ez a legnagyobb terjedelmű rovatunk, amely a matematikatanítás elvi-módszertani kérdéseivel foglalkozik. Itt közöljük a nevelők kipróbált jó tanítási eljárásait is és az ezek feletti vitacikkeket.

2. Továbbképzési rovat. Elsősorban a tanítás anyagához kapcsolódó szakmai problémákat dolgozzuk itt fel.

3. Folyóirat- és könyvszemle a megjelenő hazai és külföldi, elsősorban szovjet és népi demokratikus szakkönyvek és szakfolyóiratok rendszeres ismertetésére.

4. Feladatrovat. Általános és középiskolai tanárok számára kiválogatott, a tananyaghoz szorosan kapcsolódó feladatok, amelyek részben a tanításban, részben szakkörökön használhatók fel.

5. Hírek. Ez a rovat matematikai életünknek a nevelőket érdeklő híreit közli.

Nézzük meg, hogy közel három évtized múltán mennyiben változott A Matematika Tanításának tartalma!

Ami a módszertani rovatot illeti, annak terjedelme bizonyos mértékben összeszűkült az utóbbi években. Ez főképpen arra vezethető vissza, hogy az új matematika-tanterveknek az 1977—79. években történt bevezetésével kapcsolatos elvi-módszertani kérdéseket előbb nagyrészt az ún. tantervi útmutatók, később pedig az új tanítói, illetve tanári kézikönyvek tárgyalták.

Ezzel összefüggésben azt sem szabad figyelmen kívül hagynunk, hogy középiskolai vonatkozásban elegendő számú színvonalas cikk érkezik be a lap szerkesztőségébe megjelentetés céljából; sajnálatos módon nem állítható ez az általános iskolát illetően: ami ez utóbbi téren elfogadható, általában az sem gyakorló, általános iskolai nevelőktől származik. A lap szerkesztősége mindent elkövet annak érdekében, hogy változtasson ezen a nem megnyugtató helyzeten.

A továbbképzési rovat igyekszik betölteni eredeti rendeltetését, bár az itt közölt cikkek nagyobb hányada csak közvetett módon, pl. szakkörre javasolt

anyag formájában kapcsolódik a tanításhoz.

A lap szűk terjedelme miatt egyre kevesebb könyvismertetés jelenik meg, fokozott mértékben érvényes ez a külföldi folyóiratok, illetve az azokban napvilágot látott cikkek bemutatására. Az ismertetésre érdemes munkák számának örvendetes növekedésével, ugyanakkor a rendelkezésre álló hely változatlanul maradásával számolva belátható időn belül nem is igen remélhető javulás ezen a téren.

A feladatrovatot illetően az idők folyamán a következő változások történtek:

A lapnak egy számában az eredeti tíz helyett ma csak hat feladatot tűzünk ki megoldásra. A kitűzött feladatok megoldását nem a megjelenésüket követő második, hanem csak a negyedik számban közöljük. (Ez utóbbi összefügg egyrészt az egyes lapszámok nyomdai átfutási idejének sajnálatos megnövekedésével, másrészt gyakran késedelmes megjelenésükkel.) Megnövekedett viszont a kitűzött feladatok nehézségi szintje. Nem is mindig kapcsolódnak szorosan az iskolai tananyaghoz, ezért megoldóik között viszonylag kevés az általános iskolai tanár.

Mindezek mellett a hátrányosaknak tűnő változások mellett a feladatrovat a folyóiratnak mondhatni egyik legsikeresebb rovata. Ebbe nemcsak az a közismert tény játszik bele, hogy matematikában sohasem lehet elegendő a feladatokból, hanem főként az, hogy a lap olvasói nagyon szeretik ezt a rovatot: azok is megoldanak néhányat feladatai közül, akik valamilyen ok miatt nem küldik be megoldásaikat. Ez a rovat különben a híd szerepét is betölti a külföldön, elsősorban a szomszédos államokban élő, magyarul tudó (nem is mindig magyar anyanyelvű) matematikatanárok és hazánk között: nemegyszer fordult elő, hogy legalább annyian küldtek be helyes megoldást egy kitűzött feladatra Erdélyből, mint Magyarországról.

A hírek rovatban főleg az iskolai matematikaoktatással kapcsolatos jelentős nemzetközi rendezvényekről számolunk be röviden.

A következőkben — ugyancsak röviden — arra kísérelünk meg magyarázatot adni, hogy miért lett kevés a hely A Matematika Tanításában. Nem törekedve teljességre csupán néhány okot említünk.

Évente több alkalommal biztosítunk helyet a lapban különféle országos jellegű, illetőleg nemzetközi versenyekről szóló beszámolóknak a matematikában kiváló tanulók, újabban pedig tanárok fejlődésének elősegítése céljából is.

Hazánkban nincs olyan — felnőtteknek szóló — folyóirat, amely kifejezetten az elemi matematika kérdéseivel foglalkoznék (mint pl. a Svájcban megjelenő Elemente der Mathematik), ezért jelenleg ezt a feladatot is A Matematika Tanításának kell ellátnia.

Lényegében hasonló a helyzet a számítástechnika elemeinek az iskolai oktatásba történő bevezetésével is. Mivel tudomásunk szerint eddig még nincs olyan folyóirat hazánkban, amely a számítástechnika oktatásával foglalkoznék, következésképpen az e témakörbe tartozó cikkek is — legalább részben — szintén A Matematika Tanításának hasábjain jelennek meg. A múlt év szeptemberének elején egyébként olyan javaslatot küldtek be a lap szerkesztőségébe, hogy induljon a lapban a számítástechnika oktatásával foglalkozó rovat. A javaslattal egyetértünk, de nem tartjuk megvalósíthatónak a lap terjedelmének bővítése nélkül, ezért azt — kiegészítve a szükséges adatokkal — illetékes helyre továbbítottuk: onnan várjuk — a nem túl távoli jövőben — a javaslat elfogadására vonatkozó kedvező választ.

Az általános és középiskolai matematikaoktatás problémáin kívül az utóbbi években A Matematika Tanítása rendszeresen közöl cikkeket a szakmunkásképző iskolák, valamint a dolgozók iskolái matematikaoktatásának területéről is.

A vázolt tények ismeretében talán ter-

mészetesnek tűnik, hogy jelenlegi feladatainak ellátásához kevésnek bizonyul a lap engedélyezett terjedelme.

Az előbbiekben felvillantott helyzetkép kevés értékelést tartalmaz arra vonatkozólag, hogy milyen mértékben felelt meg rendeltetésének ez a lap az elmúlt, közel három évtized folyamán, illetve hogyan felel meg ma. Ez nem véletlen. Reméljük ugyanis, hogy a jubileum esztendejében jelenik meg A Matematika Tanításában ilyen elemző értékelés — esetleg több is —, mégpedig olyan személyek tollából, akik nem vádolhatók elfogultsággal. Az effajta elemző értékelésre, a segítő szándékú kritikára feltétlenül szüksége van a lap jelenlegi szerkesztőségének ahhoz, hogy sajátos eszközeivel a továbbiakban eredményesebben mozdíthassa elő a hazai alsó és középfokú matematikai nevelés és oktatás színvonalának emelését — s bízzunk benne, hogy a számítástechnikai nevelését, oktatását is.

ELŐD ISTVÁNNÉ
felelős szerkesztő
Tankönyvkiadó, Budapest

Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül?

A Matematika Tanítása 1982. februári számában levő cikk az 1981. szeptemberig megjelent tantervek és dokumentumok jegyzékét tartalmazta. Mindegyik könyvnél csak az utolsó kiadást jelöltük meg, zárójelben feltüntettük az alkalmazásbavétel évét is. Az alábbiakban csak az azóta megjelent új kiadványok jegyzékét közöljük.

1. ÁLTALÁNOS ISKOLA

1.1. **Alsó tagozat**

1.1.2. *Új tanterv*

Kovács Zoltán: Matematika. Általános iskola 4. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 402. (1982-től.)

Cervenakné Neményi Eszter—Halmos Istvánné—Radnai Gyuláné Szendrei Julianna—dr. Varga Tamás: Matematika-munkalapok. Általános iskola 4. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: 402/M. (1982-től.)

Dr. Ill Mártonné—Király Sándorné—Kovács Zoltán—C. Neményi Eszter—R. Szendrei Julianna—Tiszai Zoltánné: Kézikönyv a matematika 4. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: 83 049. (1982-től.)

2. KÖZÉPISKOLA (ÉS KÖZÉPFOKÚ ISKOLA)

2.2. **Szakközépiskola**

Dr. Gyapjas Ferenc: Matematika. Tankönyv-kiegészítő a számítástechnikai ágazatú közgazdasági szakközépiskola III. osztálya számára. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 14 313/I. (1981-től.)

Gádor Endréné: Matematika IV. osztály (C variáns). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 14 412. (1982-től.)

Dr. Gyapjas Ferenc: Matematika. Tankönyv-kiegészítő a számítástechnikai ágazatú közgazdasági szakközépiskola IV. osztálya számára. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: 14 313/II. (1982-től.)

2.3. **Gimnázium**

Dr. Korányi Erzsébet—dr. Urbán János: Matematika IV. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: 13 402. (1982-től.)

Dr. Korányi Erzsébet: Matematika IV. osztály (fakultatív A változat). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: 13 431/A. (1982-től.)

Hajnal Imre—dr. Nemetz Tibor—dr. Pintér Lajos—dr. Urbán János: Matematika IV. osztály (fakultatív B változat). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: 13 431/B. (1982-től.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Matematika munkatankönyv IV. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: 13 425/MT. (1982-től.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Matematika munkatankönyv IV. A-fakultatív változat. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: 13 431/A/MT. (1982-től.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Tankönyvi útmutató a IV. osztályos matematika munkatankönyvekhez. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: 84 086. (1982-től.)

3. DOLGOZÓK ISKOLÁJA

3.1. **Szakközépiskola**

3.1.1. *Szakmunkások szakközépiskolája*

Czapáry Endre: Matematika II. (Esti és levelező tagozat.) 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: D 12 602. (1982-től.)

3.1.2. *Dolgozók szakközépiskolája*

Újvári István: Matematika I. (Esti és levelező tagozat.) 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: D 14 102. (1982-től.)

3.2. **Gimnázium**

Dr. Koller Lászlóné: Matematika I. (Esti és levelező tagozat.) 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: D 13 102 (1982-től.)

NOVÁK LÁSZLÓNÉ
osztályvezető-helyettes
Országos Pedagógiai Intézet

Beszámoló az Úttörő-matematikusok 1982. évi vetélkedőjének országos fordulójáról

Az 1981—82. tanévben az Úttörő-matematikusok vetélkedőjének országos fordulójára Csillebércen került sor 1982. június 18—20. között az egyéb úttörő-vetélkedőkkel, -szemlékkel egy időben. A nagy létszám miatt két napig tartott a verseny. Az első napon 98 hetedikes és 103 nyolcadikos vetélkedett, és ennek alapján került a döntőbe 41 hetedikes és 37 nyolcadikos, akik között második napon dőlt el a sorrend. A sorrend megállapításánál figyelembe vettük az első napi teljesítményt is.

A feladatok és megoldásuk

(A leírt megoldásmódok a legeredményesebben szereplő pajtások gondolatait tartalmazzák.)

7. osztály

Az első napi feladatok

1. *a)* Mennyi az összege az 5, 6, 7, 8 számjegyekből képezhető összes négyjegyű számnak? (Mindegyik számjegyet csak egyszer használhatod fel.)

b) Bizonyítsd be, hogy ez az összeg osztható 101-gyel!

Megoldás:

a) A négy különböző számjegyből 24 négyjegyű szám képezhető.

b) A négy számjegy mindegyike hatszor fordul elő mindegyik helyen. Ezért a 24 szám összege felírható így is:

$$(5+6+7+8)\cdot 6\cdot 1000+(5+6+7+8)\cdot 6\cdot 100+(5+6+7+8)\cdot 6\cdot 10+$$

$$+(5+6+7+8)\cdot 6=156\cdot 1000+156\cdot 100+156\cdot 10+156=156\cdot 1111=$$

$$=156\cdot 101\cdot 11\ (=173\,316).$$

A szorzat egyik tényezője 101, ezért a szorzat biztosan osztható 101-gyel.

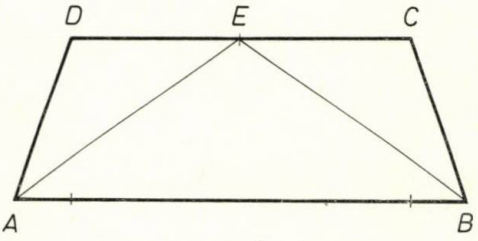
A helyes megoldásért 5 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 94%.

A feladat helyes megoldására akkor is megadtuk az 5 pontot, ha a tanuló másképpen okoskodott, pl. felírta mind a 24 számot, összeadta és az összeget elosztotta 101-gyel.

2. Egy körbe írható trapéz egyik alapja 8 cm, szárai 3 cm-esek. Szerkeszd meg a trapézt, ha tudjuk, hogy az adott alapon levő szögek felezői pontosan a másik alapon metszik egymást!

Vázlatrajz:

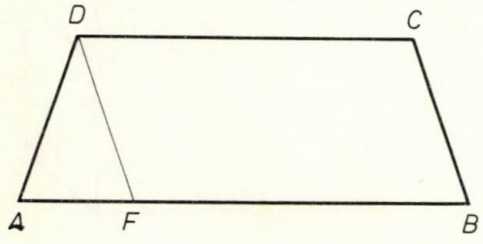


Megoldás:

$DAE\sphericalangle = EAB\sphericalangle$, mert AE felezi a DAB szöget;

$DEA\sphericalangle = EAB\sphericalangle$, mert váltószögek (fordított állású szögek). Ebből a két egyenlőségből következik, hogy $DAE\sphericalangle = DEA\sphericalangle$.

Az AED háromszög tehát egyenlő szárú. $AD=DE=3$ cm. Ugyanez igaz a BEC háromszögre is. $BC=CE=3$ cm. $DE+EC=DC=6$ cm. A trapézt a négy oldalából kell megszerkeszteni, például így:



— megszerkesztjük az AFD háromszöget;

— majd kiegészítjük az $FBCD$ paralelogrammával.

A helyes megoldásért 6 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 48%.

3. Egy matematika versenyen három feladatot kellett megoldani. Az első feladatot a versenyzők $\frac{4}{5}$ része, a második feladatot a versenyzők $\frac{1}{3}$ része oldotta meg. A harmadik feladatot 85-en oldották meg, és ezeknek a száma annyival több a második

feladatot megoldók számánál, mint amennyivel kevesebb az első feladatot megoldók számánál. Hányan indultak a versenyen, és hányan oldották meg az első, illetve a második feladatot?

Megoldás:

Ha a versenyzők száma x, akkor a következő egyenletet írhatjuk fel:

$\frac{4x}{5} - 85 = 85 - \frac{x}{3}$. Ebből $x = 150$.

A versenyen 150-en indultak. Az első feladatot 120-an, a második feladatot 50-en oldották meg.

Ellenőrzés: 120—85=85—50.

A helyes megoldásért 6 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 95%.

4. Egy kockát síkkal metszünk. Lehet-e a kocka síkmetszete

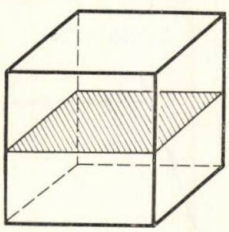
a) négyzet;
b) téglalap;
c) szabályos háromszög;
d) körbe írható trapéz;
e) szabályos hatszög?

Állításaidat indokold! Rajzolj térhatású ábrákat is magyarázatodhoz!

Megoldás:

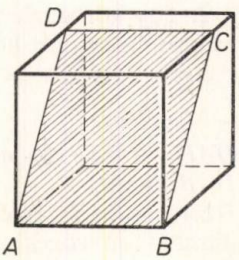
A kocka síkmetszete lehet:

a) négyzet;
pl. így:



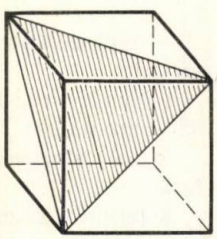
A metszősík párhuzamos a kocka valamelyik lapjával.

b) téglalap;
pl. így:



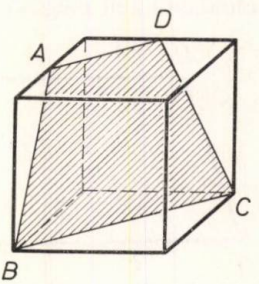
Az $ABCD$ négyszög átlói egyenlők és felezik egymást.

c) szabályos háromszög;
pl. így:



A metszősík három szomszédos lap átlóján halad át.

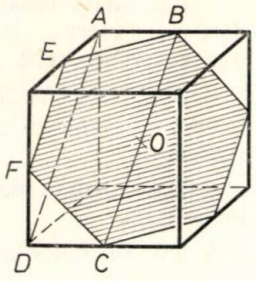
d) körbe írható trapéz;
pl. így:



Most A és D pont egy-egy él felezőpontja.

$AD \parallel BC$, $AB = DC$, $ABC\sphericalangle = DCB\sphericalangle$.

e) szabályos hatszög;
pl. így:



BC∥*EF*, mert mindkettő párhuzamos az *AD* lapátlóval. Ezért az *EBCF* négyszög trapéz. Ezen a trapézon rajta van a kocka *O* középpontja is. Ez és a többi hasonlóan megrajzolható trapéz mind ugyanabban a síkban van, mert van három-három olyan közös pontjuk, amely nincs egy egyenesen. (Az egyik mindig a kocka középpontja.) A hatszög tehát síkbeli. A kocka szimmetriája miatt oldalai és szögei is egyenlők.

A teljes és helyes megoldásért 9 pontot adtunk.
A tanulók teljesítménye 58%.

A második napi feladatok

1. Annyi forintot fizettünk 16 ceruzáért, mint amennyi ceruzát vehetünk 100 forintért. Mennyibe kerül egy ceruza?

Megoldás:

Ha egy ceruza x forint, akkor 16 ceruza $16x$ forint, és 100 forintért $\frac{100}{x}$ ceruzát vehetünk.

$$16x = \frac{100}{x}$$

$$x^2 = \frac{25}{4}$$

$$x = 2{,}5.$$

Egy ceruza ára 2,50 forint, 16 ceruza ára 2,50 Ft · 16 = 40 Ft.
100 forintért (100:2,5 =) 40 ceruzát vásárolhatunk.
A helyes megoldásért 4 pontot adtunk.
A tanulók teljesítménye 84%.

2. Hányféleképpen helyezhetünk el 3 polcon 6 különböző könyvet? (Egy polcon a sorrend nem számít.)

Megoldás:

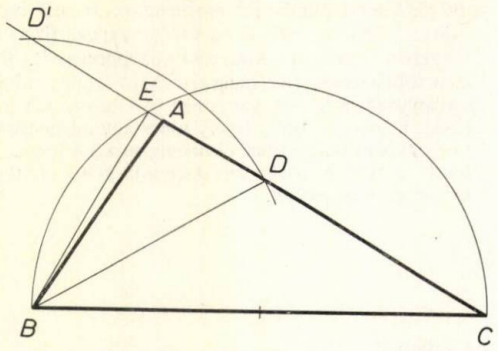
Egy könyvet három polcon — 3-féleképpen helyezhetünk el;
két könyvet három polcon — $3 \cdot 3 = 3^2$-féleképpen helyezhetünk el;
három könyvet három polcon — 3^3-féleképpen helyezhetünk el;
...
hat könyvet három polcon — 3^6-féleképpen helyezhetünk el.

$3^6 = 729$.
6 különböző könyvet három polcon 729-féleképpen helyezhetünk el.
A feladat helyes megoldásáért 6 pontot adtunk.
A tanulók teljesítménye: 12%. (Csupán három tanuló oldotta meg helyesen.)

3. Szerkessz háromszöget, ha az a oldala 6 cm, a b oldallal szemközti szög felezője (f_β) 3,5 cm, a b oldalhoz tartozó magasság 3 cm!

Megoldás:

Az a-val és az m_b-vel — Thalesz-kör segítségével — megszerkesztjük a *BCE* derékszögű háromszöget. A *CE* egyenesén megjelöljük a *B*-től f_β távolságra levő pontokat.



A két metszéspont ellenére a feladatnak a mi adatainkkal csak egy megoldása van, mert a $D'BC\sphericalangle$ kétszerese nem kevesebb, mint 180°.

$\beta = 2 \cdot DBC\sphericalangle$. A háromszög A csúcsa a CE egyenes és a β szárának metszéspontja.

A feladat helyes megoldásáért 7 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 70%.

4. Anna, Béla, Cili és Dénes takarékbélyegben gyűjtött pénzéről a következőket tudjuk:

Béla pénze 80%-a Anna pénzének.

Cili pénze $\frac{3}{4}$ része Béla pénzének és másfélszerese Dénes pénzének. Annának 120 Ft-tal van több, mint Dénesnek.

Mennyi pénze van a gyerekeknek külön-külön?

Megoldás:

Ha Anna pénze a, akkor Bélának $0{,}8a$, Cilinek $0{,}6a$ és Dénesnek $0{,}4a$ forintja van.

$a - 0{,}4a = 120$. Ebből $a = 200$.

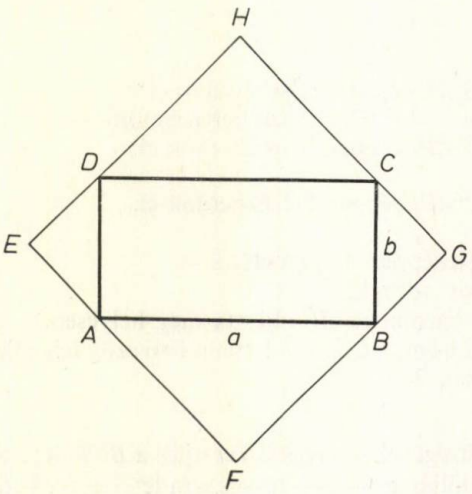
Annának 200 forintja, Bélának 160 forintja, Cilinek 120 forintja és Dénesnek 80 forintja van.

A helyes megoldásért 7 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 88%.

5. Szerkesszünk egy téglalap oldalai mint átfogók fölé egyenlő szárú derékszögű háromszöget! Igazoljuk, hogy ez a négy háromszög a téglalappal együtt egy négyzetet alkot! Mennyivel nagyobb ennek a négyzetnek a területe a téglalap területénél, ha a téglalap két szomszédos oldala a és b?

Megoldás:



$$AF = FB = CH = HD$$

és $$DE = EA = BG = GC.$$

Ebből következik, hogy

$$EA + AF = FB + BG = GC + CH = HD + DE.$$

Vizsgáljuk meg például az A pontban keletkezett szögeket!

$$EAD\sphericalangle = 45°, \quad DAB\sphericalangle = 90°,$$

$$BAF\sphericalangle = 45°.$$

$$EAD\sphericalangle + DAB\sphericalangle + BAF\sphericalangle = 180°.$$

Tehát az EA és az AF szakaszok egy egyenesbe esnek.

Ugyanez igaz az FB és BG, a GC és CH és a HD és DE szakaszokra is. Tehát a $HEFG$ sokszög négyzet.

A kapott négyzet területe $\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}=\right)\frac{a^2+b^2}{2}$-vel nagyobb a téglalap területénél.

A helyes megoldásért 6 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 67%.

8. osztály

Az első napi feladatok

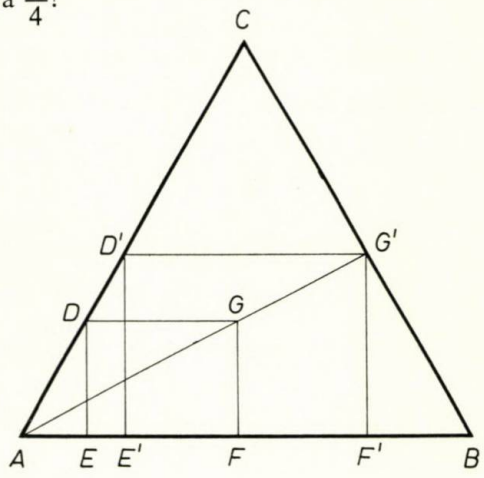
1. Megegyezik a 7. osztály első napi első feladatával.

A tanulók teljesítménye 95%.

2. Egy 6 cm oldalú szabályos háromszögbe szerkessz olyan téglalapot, amelyikre igaz az, hogy a szomszédos oldalak aránya $\frac{3}{4}$!

A feladat megoldásakor a középpontos hasonlóságról tanultakat alkalmazzuk. Először az A szög szárai közé a szerkesztendő téglalaphoz hasonlót szerkesztünk, majd azt az A csúcsból a kívánt nagyságúra nagyítjuk.

$$\frac{DE}{EF}=\frac{D'E'}{E'F'}=\frac{3}{4}.$$



A feladat megoldásáért 6 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 59%.

3. Összeadtam bizonyos számú, egymás után következő természetes számot és eredményül 1000-et kaptam. Melyek lehettek ezek a számok?

Megoldás:

Próbálgatással, okoskodással rájöttek a megoldók arra, hogy a tagok számával osztható az 1000, és a tagok száma páratlan. A tagok számtani közepe megegyezik a középső taggal.

A feladatnak három megoldása van.

1. megoldás: a tagok száma 1, és ez a tag az 1000.
2. megoldás: a tagok száma 5, ezek: 198, 199, 200, 201, 202.
3. megoldás: a tagok száma 25, ezek:
28, 29, ..., 40, ..., 50, 51, 52.

Akik megtalálták mind a három megoldást, azok 8 pontot kaptak. A tanulók teljesítménye 49%.

4. A Budapestről 7 órakor induló személyhajó 12 órára ér Esztergomba. Az Esztergomból 8 órakor induló hajó pedig 11 óra 30 perckor ér Budapestre. Ha mindkét hajó sebességét egyenletesnek tekintjük, és nem vesszük figyelembe a közbeeső hajóállomásokon eltöltött időt, akkor körülbelül mikor találkozik a két hajó? Találkozásukig a Budapestről induló az út mekkora részét tette meg?

Megoldás:

A Budapestről induló hajó 1 óra alatt az út $\frac{1}{5}$ részét teszi meg, az Esztergomból induló pedig az $\frac{1}{3{,}5}=\frac{2}{7}$ részét. Ha a 8 órától — az esztergomi hajó indulásától —

találkozásukig eltelt időt a-val jelöljük, akkor felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{1}{5}+\frac{a}{5}+\frac{2a}{7}=1, \quad \text{ebből} \quad a=\frac{28}{17}.$$

$\frac{28}{17}$ óra megközelítőleg 1 óra 39 perc.

A két hajó körülbelül 9 óra 40 perckor találkozik.

A Budapestről induló addig a teljes út $\frac{1}{5}+\frac{28}{17}\cdot\frac{1}{5}=\frac{45}{85}$ részét tette meg, ez a távolság valamivel több, mint az út fele.

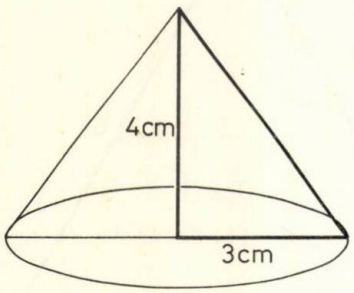
A feladat megoldásáért 6 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 67%.

5. Egy 3 cm, 4 cm, 5 cm oldalú háromszöget mindhárom oldalegyenese — mint tengely — körül elforgatjuk. Mekkora az így kapott forgástestek térfogata?

A hiányzó adatot szerkesztéssel vagy számítással is megkaphatod!

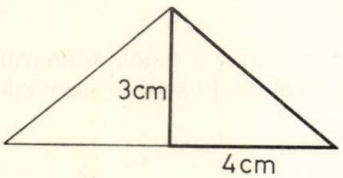
Megoldás:



A háromszög derékszögű, oldalainak mérőszámai pitagoraszi számhármast alkotnak.

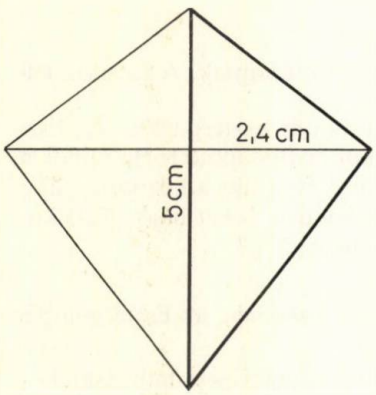
Ha a 4 cm-es befogója körül forgatjuk el a háromszöget, akkor a keletkezett forgástest olyan kúp, amelyik alapkörének sugara 3 cm, a kúp magassága pedig a másik befogó, vagyis 4 cm.

Ennek a kúpnak a térfogata: $\frac{3^2\cdot 3{,}14\cdot 4}{3}\ \text{cm}^3\approx$ $\approx 38\,\text{cm}^3$.



Ha a 3 cm-es befogója körül forgatjuk el a háromszöget, akkor a keletkezett forgástest olyan kúp, amelyik alapkörének sugara 4 cm, magassága 3 cm.

Ennek a kúpnak a térfogata megközelítőleg $50\ \text{cm}^3$.



Ha az átfogó körül forgatjuk el a háromszöget, akkor a keletkezett forgástest olyan kettőskúp, ahol közös az alaplap, és a magasságok összege 5 cm. Közös alaplapjuk sugara 2,4 cm, ezért a két kúp együttes térfogata

$$\frac{2{,}4^2\cdot 3{,}14\cdot 5}{3}\ \text{cm}^3\approx 30\ \text{cm}^3.$$

A feladat megoldásáért 7 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 87%.

A második napi feladatok

1. Megegyezik a 7. osztály második napi első feladatával. A tanulók teljesítménye 86%.

2. Az Állami Biztosító a csőrepedésekből származó kártérítésekre 1977-ben, 1978-ban, 1980-ban és 1981-ben összesen 250 millió forintot fizetett ki. 1981-ben kétszer annyit, mint 1978-ban, és 20 millióval többet, mint 1980-ban.

Ha 1980-ban kétszeresét fizették volna az 1977. évi kártérítésnek, akkor az említett négy évben kifizetett összeg 1,6%-kal kevesebb lenne, mint 250 millió forint.

Mennyit fizettek ezekben az években külön-külön a csőrepedésekből származó kártérítésekre?

Megoldás:

Foglaljuk táblázatba a feladatban szereplő mennyiségeket, összefüggéseket!

Év	Kifizetett összeg (millió Ft)	
	1. változat	2. változat
1977	$270-5x$	$270-5x$
1978	x	x
1980	$2x-20$	$540-10x$
1981	$2x$	$2x$
Összesen	250	$250-4=246$

Csak az 1980-nál megjelölt összeg változott, ezért felírhatjuk a következő egyenletet:

$$2x-20-4 = 540-10x, \quad \text{ebből} \quad x = 47.$$

1977-ben 35 millió, 1978-ban 47 millió, 1980-ban 74 millió és 1981-ben 94 millió forintot fizetett az Állami Biztosító csőrepedésekből származó kártérítésekre.

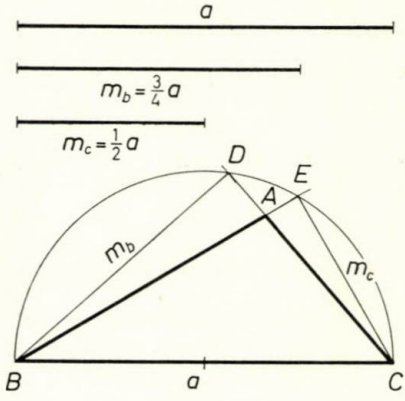
A feladat megoldásáért 7 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye (csak) 37%.

3. Szerkessz olyan háromszöget, amelyikben a b oldalhoz tartozó magasság (m_b) $\frac{3}{4}$ része az a oldalnak, és másfélszerese a c oldalhoz tartozó magasságnak (m_c-nek)!

Megoldás:

A szerkesztés Thalesz-kör segítségével történhet. Az a szakasz fölött húzott félkörön B pontból $\frac{3}{4}a$, C pontból $\frac{1}{2}a$ sugarú körívvel megjelöljük a két magasság talppontját (D és E pontokat). A CD egyenes és a BE egyenes metszéspontja a háromszög A csúcsa.



A feladat megoldásáért 7 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 54%.

4. Egy 300-nál kisebb háromjegyű szám

4-gyel osztva 3-at, 9-cel osztva 5-öt ad maradékul. Melyik háromjegyű számról lehet szó?

Megoldás:

Ha a keresett számban a 4 megvan n-szer és a maradék 3, a 9 megvan k-szor és a maradék 5, akkor felírhatjuk a következő egyenletet:

$$4n+3 = 9k+5. \quad \text{Ebből} \quad n=2{,}25k+0{,}5.$$

Mivel n természetes szám, ezért k csak olyan természetes szám lehet, amelynek 2,25-dal való szorzatában az egészeken kívül pontosan 5 tized van. Ilyen szám a 2, 6, 10, 14, ...

Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket!

k	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42
n	5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95
A szám	23	59	95	131	167	203	239	275	311	347	383

Ezek közül csak a 300-nál kisebb háromjegyűeket kellett megkeresni. A feladatot a következő számok elégítik ki: 131, 167, 203, 239, 275.

A feladat megoldásáért 6 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 72%.

5. Egy 12 cm sugarú gömbbe egyenlő oldalú kúpot és egyenlő oldalú hengert helyezünk. (Mindkettőre az a jellemző, hogy alapkörének átmérője egyenlő a test alkotójával.)

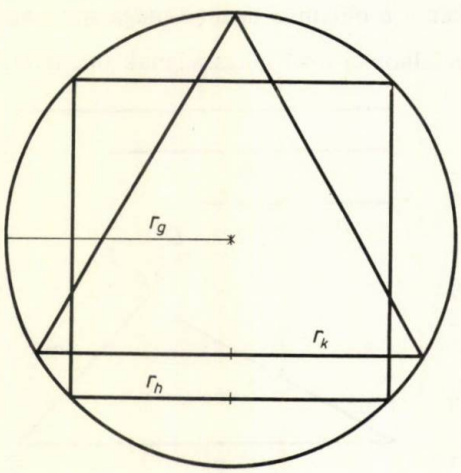
Számítsd ki mindhárom test térfogatát!

Megoldás:

A kúp és a henger sugara, illetve magassága a Pitagorasz-tétellel kiszámítható. A kúp sugara legyen r_k, a magassága m_k.

$$r_k = \sqrt{12^2-6^2} = \sqrt{108} \approx 10{,}4\ (\text{cm}).$$

$$m_k = 18\ \text{cm}.$$



$$V_k = \frac{r_k^2 \cdot \pi \cdot m_k}{3} \approx$$

$$\approx \frac{108 \cdot 3{,}14 \cdot 18}{3} \approx 2035\ (\text{cm}^3).$$

A henger sugara legyen r_h, magassága m_h.

$$r_h = \sqrt{\frac{12^2}{2}} = \sqrt{72} \approx 8{,}5\ (\text{cm}).$$

$$m_h = 17\ \text{cm}.$$

$$V_h =$$

$$= r_h^2 \cdot \pi \cdot m_h \approx 72 \cdot 3{,}14 \cdot 17 \approx 3843\ (\text{cm}^3).$$

A gömb térfogata:

$$V_g = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3} \approx \frac{4 \cdot 12^3 \cdot 3{,}14}{3} \approx 7235\ (\text{cm}^3).$$

A feladat helyes megoldásáért 9 pontot adtunk.
A tanulók teljesítménye 47%.

A verseny első helyezettjei:

7. osztály

1. **Szabó György,** Sátoraljaújhely;
2. **Benczur András,** Budapest, XII. kerület;
3. **Pál Gábor,** Budapest, III. kerület;

4—5. **Sziklai Péter,** Budapest, XIV. kerület;
Vadász Dénes, Miskolc;

6. **Rátkai István,** Esztergom.

8. osztály

1. **Karsai Tamás,** Debrecen;
2. **Páli István,** Kecskemét;
3. **Szabó Ákos,** Győr;

4—5. **Kiss Etele,** Budapest, II. kerület;
Vida Imre, Pécs;

6—7. **Balogh Csaba,** Komoró;
Révai Vera, Budapest, V. kerület.

A matematikatanítás módszere

DR. HACK FRIGYES
egyetemi adjunktus
ELTE TTK

Személyi számítógépek az iskolában és a tanárképzésben

Közel öt év telt el azóta, hogy e lap hasábjain (1978/2) beszámoltam az ELTE Természettudományi Karán folyó számítástechnikai oktatás helyzetéről, a tanárszakos hallgatók képzésében alkalmazott tematikai és módszertani elvekről, továbbá arról a számítógép-centrikus problémakezelésről, amelynek megalapozására a végzősöket felkészíteni kívánjuk. Az eltelt időszak hossza önmagában még nem indokolná, hogy ennek a — matematika oktatása szemszögéből nézve periferikus — területnek a helyzetével újra foglalkozzunk, de a környezetünkben végbement folyamatok a témát ismét időszerűvé teszik. Az utóbbi két évben — más világjelenségekkel együtt — a mikroszámítógépes forradalom is „begyűrűzött" hazánkba. A mikroelektronika fejlődése eddig elképzelhetetlen tömegtermelést és rohamosan csökkenő árakat tesz lehetővé. Ismerve a közoktatás pénzügyi forrásainak kapacitását, e nélkül az utóbbi körülmény nélkül gondolni sem lehetne arra, hogy a nem szakirányú képzéssel foglalkozó iskolákban a tanulók rendszeresen gépközelbe kerüljenek.

Különböző forrásokból értesülhettünk arról, hogy a Művelődési Minisztérium Tudományszervezési és Informatikai Intézete pályázatot hirdetett olyan mikroszámítógépek gyártására, amelyek az iskolai számítógép feladatának ellátására alkalmasak. A pályázat feltételei között szerepelt, hogy a gyártónak 1985-ig mintegy 2000 ilyen gépet kell a középiskolák számára biztosítania. A kiszivárgó hírek szerint annyi bizonyos, hogy a gép ára egy színes tv-készülék árával azonos nagyságrendű lesz, ami azt jelenti, hogy a költségvetési keretből iskolánként leg-

alább egy gép beszerzése lehetővé válik. Ennek jelentőségét — úgy vélem — nem szükséges részletesen fejtegetni, elegendő a „krétafizika" — kísérletező fizikaoktatás alternatívákra mint analógiára utalni.

Az események felgyorsulásával szükségessé vált, hogy a lap Olvasói átfogó tájékoztatást kapjanak a számítástechnikában lezajló változásokról, főként arról az alkalmazási szemléletváltozásról, amely a mikroszámítógépek megjelenésével jár együtt.

A számológépek osztályozása

Mindenekelőtt — az Olvasó szíves türelmét kérve — néhány terminológiai kérdést kell tisztázni. Nem azért, hogy modern formában élesszünk újjá valamilyen homousion-homoiusion természetű vitát, hanem azért, hogy a gyors fejlődés által szükségszerűen kitermelt szakkifejezések rendszerében (?) némi útmutatást adjunk.

Történelmi távlatokba visszatekintve nyomon követhető az a törekvés, hogy a fizikai munka mellett a szellemi munka terheit is mesterséges szerkezetekre, gépekre ruházza át az ember. E szellemi munkák közül a számolási munka volt az, amelynél ez az igény a legkorábban és a legpontosabban meghatározott formában jelentkezett és teljesült be. A számolási munkát segítő szerkezetek, a számolóeszközök fejlődési folyamatának kései szakaszában, a kor technikája által megengedett színvonalon születtek meg azok az eszközök, amelyeket a „gép" jelzővel illetünk. Így a *számológép* mint terminusz technikusz a számolóeszközök olyan osztályának megjelölésére használatos, amelyekben valamilyen fizikai jelenség biztosítja a szerkezeti elemek kapcsolatát, s így az egész rendszer működési mechanizmusát. Az ellentétes fogalom megjelölésére az *egyszerű számolóeszköz* megnevezés látszik célszerűnek. Ilyenek például a golyós számvető (abacus, scsoti), a logarléc, a táblázatok és a nomogrammok.

A számológépeket három, egymástól független szempont szerint osztályozzuk:

a) Technikai felépítésük alapján mechanikus, elektromechanikus és elektronikus számológépeket különböztetünk meg. Ez utóbbiaknál az elektroncsöves, a tranzisztoros és az integrált áramköri technikával épült berendezések megkülönböztetésére az 1., 2., 3. generáció elnevezések használatosak.

b) Működési módjuk szerint a számológépek lehetnek kézi- vagy automatikus vezérlésűek. Ez utóbbiak a több lépésből álló számolási munka során nem igénylik a lépésenkénti beavatkozást. Az automaták osztályán belül kötött működésű (fix programú) és programozható (változtatható programú) automatákat különböztetünk meg. A programozható automaták egy fontos osztályát alkotják azok, amelyeknél a program a működés ideje alatt a gépnek egy erre a célra szolgáló szerkezeti egységében, a memóriában tárolható. Ezeket belső programvezérlésű, vagy tárolt programú automatáknak nevezzük.

c) Az adatábrázolás módja szerint analóg, illetve digitális számológépeket különböztetünk meg. Az ún. hibrid gépekben mindkét ábrázolási mód alkalmazásra kerül.

Amikor egy számológépet jellemezni akarunk, meg kell adni e három, egymástól független osztályozás szerinti besorolását. Ily módon az a gép, amelyet *számítógépnek* (komputer, computer, вычислительная машина) nevezünk

a) elektronikus,
b) belső programvezérlésű — automatikus,
c) digitális számológép.

A zsebszámológépek ma már igen népes választékában is találunk számítógépeket. Ezeket a köznyelv programozható zsebszámológépnek is nevezi. Ilyen például a magyar gyártmányú PTK—1072—1 típusú számológép. Nem nevezhetjük azonban számítógépnek azokat a zsebszámológépeket, amelyek csak a négy

alapművelet végzésére, de azokat sem, melyek ezenfelül néhány függvény kiszámítására alkalmasak. Ezek a gépek működési módjuk szerint kézi vezérlésű automaták. Megnevezésükre a *kalkulátor* megjelölés látszik célszerűnek. Úgy vélem, e szót nyelvünk ugyanúgy befogadja, mint a traktor, akkumulátor, elevátor, motor stb. szavakat. A szó latin eredetijének néhány származéka: kalkuláció, kalkulál — már szókészletünk elfogadott, ha nem is gyakran és nem túlságosan széles körben használt eleme.

A személyi számítógép

A számítógépek fejlődésének történetében a mérföldköveket az elektronikus kapcsolóelemek gyártási technológiájának váltása jelentette. Tudni kell azonban, hogy az elektroncsövekről a tranzisztorokra, majd az integrált áramkörökre való áttérést jelentő generációváltásokkal párhuzamosan az ember—gép kapcsolat fokozatosan humanizálódott. A műszaki fejlődés lehetővé tette a nagyobb teljesítményű, bonyolult rendszerek kiépítését, s a magasabb komplexitás által biztosított gépi intelligenciával a számítógépek kezelése, ezenbelül a programozás, rendkívüli mértékben leegyszerűsödött. A kommunikáció egyszerűsödése lehetővé tette — *volna* — azt, hogy bárki, aki a saját szakterületén felmerülő feladatok megoldásához számítógépet kíván felhasználni, közvetlen kapcsolat formájában elégítse ki igényeit. Más szóval számítógépes szakemberek igénybevétele nélkül fordulhasson a számítógéphez. Ezt a lehetőséget azonban a már gigantikus méretű számítógép-rendszerekben nem lehetett kihasználni. A nagy teljesítményű számítógépet üzemeltető számítóközpontok ugyanis szükségszerűen sok felhasználó kiszolgálására rendezkednek be. Az egyes munkák feldolgozását, ütemezését meg kell szervezni. Az igényeket vagy beérkezésük sorrendjében, vagy szabályozott prioritási rend szerint lehet csak kielégíteni. Ennek következményeképpen egyes munkák átfutási ideje a feladat fontosságához képest igen nagy lesz. A gépet használni kívánó nem-számítógépes szakember gyakran kerül olyan döntés elé, hogy vagy kivárja, amíg a programja sorra kerül, vagy hagyományos eszközökkel maga végzi el a szükséges számításokat.

Egyrészt a felhasználói igények differenciálódásának, másrészt a mikroelektronika tökéletesedésének következtében a számítógépek fejlődési vonala két ágra szakadt. Az egyik ágat a nagy teljesítményű számítógépek és a környezetükben működő kiegészítő berendezések sokoldalúsága jellemzi. A periferiális egységek között a nagy pontosságú rajzolóautomatákat, a szuper sebességű nyomtatókat és a nagy kapacitású gyors háttértárakat említhetjük elsősorban. Ilyen kiszolgáló, információ-közvetítő és -tároló berendezések nélkül elképzelhetetlen lenne a korszerű információ-feldolgozó rendszerek működése. A fejlődés másik ágát a kisebb volumenű munkákra alkalmas számítógépek kifejlesztése jellemzi. A bevezetőben említett mikroszámítógépes forradalom megnevezést az indokolja, hogy a méretek és a teljesítmény csökkenése úgy mehetett végbe, hogy a gépek komplexitása, s ezért intelligenciája nem csökkent lényegesen. A mikroelektronikai alkatrészek miniatűr méretei és a bonyolult áramkörök előállításának alacsony költségei teszik lehetővé, hogy a kis teljesítményű számítógép is biztosítani tudja az ember—gép kapcsolatnak azt a szintjét, amelyet a nagy számítógépek kifejlesztése során sikerült elérni.

A mikroprocesszort* tartalmazó ún. *mikroszámítógépek* egy része a nagyobb

* A processzor a számítógép központi végrehajtó egysége, amely a műveletvégző aritmetikai egységet és a vezérlő egységet tartalmazza.

gépekhez hasonlóan olyan környezetben működik, amely speciális célú periferiális egységeket tartalmaz. Az igazi forradalmat azok a mikrogépek jelentik, melyek nem igényelnek különleges kiegészítő berendezéseket. Ezeket nevezik *személyi számítógépek*-nek. A típus kifejlesztésénél a tervezők többek között azt vették figyelembe, hogy modern környezetünkben sok olyan szerkezet van mindennapos használatban, amelyeket a számítógépes perifériák funkciójának ellátására fel lehet használni. Így elsősorban a műsorvevő televízió képernyője az, ami az ember—gép párbeszéd közvetítésére kiválóan megfelel. Alkalmas áramkörökkel elérhető, hogy a számítógép a program eredményét a tv képernyőjére írja ugyanúgy, mint az ismert elektronikus tvjátékok teszik.

Azt azonban, hogy az ember—gép párbeszéd nyelve ne különbözzön lényegesen az emberek közötti kommunikációban használt nyelvtől, csak úgy lehet biztosítani, ha a számítógép kezelőgombjainak rendszere — eltérően a kalkulátorokon található billentyűzettől — a közönséges írógépével azonos szerkezetű. Mivel az elektromos írógép vagy a telex nem tekinthető olyan elterjedt háztartási eszköznek, mint a televízió, a személyi számítógépek gyártói a központi gépet a párbeszédet lehetővé tevő billentyűzettel együtt állítják elő. Ilyenformán a személyi számítógép a kereskedelemben olyan készülék formájában jelenik meg, amely a számítógép áramköreit, a tv-kimenet számára videojeleket előállító áramköröket és külső kezelőlapján közönséges írógép-billentyűzetet tartalmaz.

A személyi számítógépből és a tv-készülékből álló alapkiépítés képezi azt a számítógépes rendszert, amely igen sok felhasználási terület igényeit tökéletesen kielégíti. E lap hasábjain elsőként kell említeni a számítógépek kezelésének, programozásának és felhasználásának tanulására *kiképzőgépként* való alkalmazását. A fentebb említett és különösen hangsúlyozandó magas fokú gépi intelligencia lehetővé teszi, hogy egy átlagos képességű középiskolás tanuló a gép kezelését és alapszintű programozását *2-3 óra alatt* elsajátítsa.

A számítástechnikai ismeretek oktatása

A személyi számítógépeknek az iskolában való megjelenése időszerűvé teszi, hogy a tantervnek a számítástechnikai alapképzésre vonatkozó koncepcióit felülvizsgáljuk. Az első és legfontosabb elv az, hogy a matematika-tantervben szereplő számítástechnikai témáknak az általános számítástechnikai műveltség megalapozását kell szolgálniuk, és nem szakmai ismeretmorzsákkal megtölteni az amúgy is zsúfolt tananyagot. Így például a formális logikával és a kapuáramkörökkel foglalkozó témát az általános képzésben felesleges tárgyalni. Erre az ismeretre a számítógépes szakmák között is csak a tervezőnek van szüksége. Ugyanígy felesleges a számítástechnikai alapképzés szempontjából a 2-es számrendszer tárgyalása. A számírás és a különböző alapú számrendszerek kapcsolatának kérdése az általános matematikai műveltség része.

A matematika tananyagának mennyiségi növelése nélkül tanítható a problémák megoldástervének tudatos és egzakt megfogalmazása, a számítógépes vagy attól független algoritmus leírása. Erre a célra mind a közép-, mind az általános iskolai korosztályoknál alkalmas a folyamatábrás vagy a verbális (anyanyelvi) rögzítés. A megoldástervek készítésének megkövetelése nem új a matematika módszertanában, hiszen minden tananyagrész alkalmazási példái az aktuális gyakorláson kívül ezt a módszertani célt is hordozzák. A számítástechnika elterjedésével csupán előtérbe kerülnek a tervezés olyan mozzanatai, amelyek gép nélküli környezetben elhanyagolhatók. Nevezetesen az egyes lépések megfogalmazásának korlátai és a végrehajthatóság előzetes vizsgálata.

A számítógép iskolai jelenléte egyetlen

többletet jelent a tananyagban, a programozási nyelv ismeretét. Ha azonban a megoldásterv algoritmikus leírásánál a folyamatábra vagy a verbális terv a számítógép által megszabott formális követelményeknek eleget tesz, akkor az algoritmus programnyelvre való lefordítása rutin feladat. Az elkészült programoknak a személyi számítógéppel való *azonnali* kipróbálása viszont olyan mértékű motivációt jelent, hogy a többletmunka bőségesen megtérül.

Amikor a számítástechnikai ismeretek középiskolai oktatásáról van szó, óhatatlanul a programozás oktatására gondol mindenki. Nem szabad azonban elfelejtkezni arról, hogy a középiskolába járóknak csupán elenyésző része lesz számítógépes szakember. Az általános képzésben részt vevők többségét arra kell felkészíteni, hogy a majdani szakterületén felmerülő problémákat számítógép-centrikusan tudja kezelni, képes legyen a probléma olyan megfogalmazására, amely azt a számítógépes megoldásra alkalmassá teszi. Másrészt nem szabad arról sem megfeledkezni, hogy a számítástechnikai fejlődés nem csupán a gépek technikai-műszaki tökéletesedését jelenti. A fejlődés fontos tényezője az a sok kidolgozott program, amely a számítógépek felhasználását gazdaságossá és laikusok számára is hozzáférhetővé teszi. Ma már egy számítógépes környezetben munkába álló fiatal olyan programokkal és programrendszerekkel találkozik, melyeket hosszú hónapok, esetleg évek alatt fejlesztettek ki. A nem-számítógépes szakembernek nem a gép programozását, hanem a meglevő programoknak az aktuális feladatra való alkalmazását kell megtanulni. Az iskolai mikrogépek jól szerkesztett *programkönyvtárral* együtt a számítástechnika alkalmazásának oktatási eszközei lehetnek.

Számítógépes demonstráció

A számítógép iskolai alkalmazásának a kiképzésben és a programozott oktatásban való felhasználásán túl egy ma még kevéssé ismert módszere a különböző tudományterületek által vizsgált jelenségek szimulációja. Az iskolákban már mindennaposnak számító dia, magnó és más médiák mellett megjelenő mikroszámítógép az eddigiekhez képest sok új szemléltetési lehetőséget ad a tanár kezébe. A képernyőn megjelenített modellkísérlet nemcsak helyettesítheti a különben elvégezhetetlen valóságos kísérletet, mint például az égimechanikai mozgások esetében, hanem a valódi kísérletek kiegészítésével olyan részletek kiemelését is lehetővé teszi, amelyeknek megfigyelése különben lehetetlen lenne. A mozgással kapcsolatos jelenségek számítógépes animációja sokkal több oldalú szemléltetést tesz lehetővé, mint a film vagy a telerekording. Ez utóbbiak ugyanis csak a jelenség egyetlen és megváltoztathatatlan lefolyását képesek rekonstruálni. A számítógépes szimulációnál viszont a mozgási paraméterek tetszés szerint megváltoztathatók, s így a jelenség igen sok variációban mutatható be. Különös jelentőségük van azoknak a biológiai, fizikai és szociológiai folyamatoknak, amelyeket stochasztikus modellkísérletekkel és csak így lehet demonstrálni oly módon hogy a jelenséget befolyásoló tényezők hatásmechanizmusa a tanulók előtt megvilágosodjék.

A tanárképzés feladatai

A személyi számítógépeknek az iskolában való megjelenése tette szükségessé, hogy a tanári szakok hallgatóinak számítástechnikai képzését új alapokra helyezzük. Felsőfokú képzésről lévén szó, a számítógépek programozása továbbra is fontos részét képezi a tananyagnak, azonban a témakörön belül a hangsúlyt a mikroszámítógépek specifikus kezelésére helyeztük. Változatlan intenzitással foglalkozunk azzal, hogy a tanárjelöltek képesek legyenek saját szaktárgyuk prob-

lémáinak számítógépes megoldására és e tevékenységhez szükséges ismeretek továbbadására. A matematikatanárok magasabb óraszámára és a végzősök későbbi feladataink jellegére való tekintettel e szakon a számítógép-programozás ismereteinek átadása is része a képzési célnak. Különös figyelmet fordítunk a számítógépes oktatás és ezenbelül a demonstráció kérdéseire. Az a cél, hogy végzőseink a számítógépet jó hatásfokkal tudják alkalmazni a tanítási munkában.

A célok eléréséhez lehetőséget biztosít a Numerikus és Gépi Matematikai Tanszéken létrehozott mikroszámítógépes laboratórium, melyben az 1981/82. tanévben 6, az 1982/83. tanév kezdetétől 16 darab ABC80 típusú gép áll a hallgatók rendelkezésére. A tanárképzéssel foglalkozó oktatók és irányításukkal a hallgatók az eltelt rövid idő alatt is számos olyan demonstrációs programot készítettek, amelyeket az iskolai számítógépek majdani felhasználói viszontláthatnak. Arra törekszünk, hogy a sokszorosításra kerülő demonstrációs programok mellett az oktatás és a felhasználás tapasztalatait is hozzáférhetővé tegyük, ezzel is segítve a számítógépet felhasználó tanárokat.

BENCZE MIHÁLY
tanár
Brassó

Összegekről

Ebben a cikkben az $S^k_{n(p)} = \sum_{r=1}^{n} f(r) \cdot r^k$ összeg kiszámításával foglalkozunk, ahol

$$f(r) = \begin{cases} -1, & \text{ha } r \equiv 0 \pmod p \text{ és } p \geqq 2; \\ 1 \text{ a többi esetben.} \end{cases}$$

A 0-tól különböző p természetes szám értéke szerint két esettel állunk szemben:

1. Ha $p=1$, akkor az $S^k_{n(1)}=S^k_n$ jelölést használjuk. Ennek az összegnek kiszámítására könnyen igazolható a

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{k+1}{r} \cdot S^r_n = (n+1)^{k+1} - 1$$

rekurzív összefüggés. (Lásd [1]-et!) Innen rögtön következik néhány ismert képlet:

$$S^0_n = n; \quad S^1_n = \frac{n(n+1)}{2}; \quad S^2_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad S^3_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$S^4_n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}; \quad S^5_n = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12};$$

$$S^6_n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}; \quad S^7_n = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}.$$

További hasonló képletek előállítását az olvasóra bízzuk. Néhány érdekes összefüggés ilyen formulák között:

$$S^3_n = (S^1_n)^2; \quad 3(S^2_n)^2 = 2S^5_n + S^3_n; \quad 2(S^3_n)^2 = S^7_n + S^5_n; \quad 16(S^4_n)^2 = 6S^9_n + 10S^7_n - S^5_n$$

(l. a Matematikai Lapok, Kolozsvár 19 107. feladatát!);

$$7S^6_n = S^1_n(10S^4_n - 4S^2_n) + S^2_n;$$

$$3S_n^5 = S_n^3(4S_n^1-1);\quad 16S_n^7 = 2S_n^5(12S_n^1-5)+2S_n^3-3S_n^2+5S_n^1-2S_n^0;$$

$$15S_n^2S_n^4 = 8S_n^7+10S_n^1S_n^3-3S_n^3;\quad 5S_n^4 = (6S_n^1-1)S_n^2;$$

$$54(S_n^2)^3(3S_n^5+S_n^3) = (5S_n^4+S_n^2)^3;\quad 9(S_n^8-S_n^4) = 20S_n^3(S_n^4-S_n^2)-3S_n^2+5S_n^1-2S_n^0;$$

$$20S_n^9+4S_n^3 = 48S_n^5(S_n^3-S_n^1)+24S_n^5+6S_n^2-10S_n^1+4S_n^0.$$

Még két érdekes feladat:

a) Határozzuk meg az összes olyan k természetes számot, amelyekre

$$S_n^{2k+1} \equiv 0 \pmod{S_n^3}.$$

b) Határozzuk meg az összes olyan k természetes számot, amelyekre

$$S_n^{2k} \equiv 0 \pmod{S_n^2}.$$

2. A $p \geqq 2$ esetben könnyen igazolható a következő tétel:

$$S_{n(p)}^k = S_n^k - 2p^k S_{\left[\frac{n}{p}\right]}^k,$$

ahol $[x]$ jelöli az x szám egészrészét.

Ennek a tételnek az az előnye, hogy alkalmazásával az $S_{n(p)}^k$ összeg megállapítható az S_n^k-ra talált képlettel, ami eléggé egyszerű eljárás.

Az alábbiakban egy másik eljárást is adunk az $S_{n(p)}^k$ összeg meghatározása céljából. Megmutatjuk ugyanis, hogy

$$\sum_{r=1}^{k+1} p^r \binom{k+1}{r} S_{n(p)}^{k-r+1} = \sum_{r=1}^{p} \left(f(n+r)\cdot(n+r)^{k+1} - f(r)\cdot r^{k+1}\right).$$

Bizonyítás:

$$\begin{cases} (p+1)^{k+1} = 1^{k+1}+p\binom{k+1}{1}1^k+\ldots+p^k\binom{k+1}{k}1+p^{k+1}, \\ (p+2)^{k+1} = 2^{k+1}+p\binom{k+1}{1}2^k+\ldots+p^k\binom{k+1}{k}2+p^{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p+n)^{k+1} = n^{k+1}+p\binom{k+1}{1}n^k+\ldots+p^k\binom{k+1}{k}n+p^{k+1}. \end{cases}$$

Az első egyenlőség mindkét oldalát megszorozva $f(1)$-gyel, a másodikét $f(2)$-vel, ..., az n-edikét $f(n)$-nel, összeadva az így kapott egyenlőségeket, és felhasználva az f függvény értelmezését, éppen a bizonyítandó azonosságot kapjuk. Ennek az az előnye, hogy a benne szereplő rekurzív összefüggés segítségével lépésről lépésre meghatározható a kívánt összeg.

Alkalmazásként vizsgáljuk meg a $p=2$ esetet! Ekkor $f(r)=(-1)^{r-1}$, tehát megkapjuk a természetes számok ugyanakkora pozitív egész kitevős hatványainak váltakozó előjelű összegét. A nehézséget a zárt formula megtalálása jelenti. Íme néhány ilyen összegképlet:

$$S_{n(2)}^0 = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2};\quad S_{n(2)}^1 = (-1)^{n-1}\left[\frac{n+1}{2}\right]$$

($[x]$ jelöli az x szám egészrészét);

$$S_{n(2)}^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2};\qquad S_{n(2)}^3 = (-1)^{n-1}\frac{4n^3+6n^2-1+(-1)^n}{8};$$

$$S^4_{n(2)} = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$$

(l. a Matematikai Lapok, Kolozsvár 16 934. feladatát!);

$$S^5_{n(2)} = (-1)^{n-1}\frac{2n^5+5n^4-5n^2+1+(-1)^{n-1}}{4};$$

$$S^6_{n(2)} = (-1)^{n-1}\frac{n(n^5+3n^4-5n^2+3)}{2};$$

$$S^7_{n(2)} = (-1)^{n-1}\frac{n^2(8n^5+28n^4-70n^2+84)-17+17(-1)^n}{16};$$

$$S^8_{n(2)} = (-1)^{n-1}\frac{n(n^7+4n^6-14n^4+28n^2-17)}{2}.$$

Befejezésül még egy feladat:

c) Határozzuk meg az összes olyan k természetes számot, amelyekre

$$S^{2k}_{n(2)} \equiv 0 \pmod{S^2_n}.$$

Megjegyzés: A cikkben közölt eljárást át lehet írni számtani sorozatokra is.

IRODALOM

[1] BENCZE Mihály: *Matematikai jegyzet.* Matematikai Lapok, Kolozsvár, 1977. július 285. oldal.
[2] HARDY, G. H.—WRIGHT, E. M.: *An Introduction to the Theory of Numbers.* IV. kiadás. Oxford, 1960.

KAMARÁS LAJOS—PÓLA JÓZSEF
főiskolai docens főiskolai adjunktus
Pécsi Janus Pannonius Tudományegyetem

Beszámoló a tanárképző főiskolák hallgatóinak 1982. évi matematikai tanulmányi versenyéről II.

6. feladat

Határozzuk meg az összes olyan, legalább kétszer differenciálható $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, amelyre $f(1)=1$, és minden $a, b \in \mathbf{R}$ esetén

$$f(a+b) = f(a)+f(b)+ab.$$

I. megoldás: Alkalmazzuk a feltételt $a=b=0$ esetre: $f(0+0)=f(0)+f(0)+0\cdot 0$, ebből $f(0)=0$. Legyen x változó, $b \neq 0$ konstans:

$$f(x+b) = f(x)+f(b)+bx,$$

ebből deriválással

$$f'(x+b) = f'(x)+b,$$

majd átrendezéssel

$$\frac{f'(x+b)-f'(x)}{b} = 1 \quad \text{(minden } x\text{-re és } b\text{-re)}$$

adódik. Ha $b \to 0$, akkor

$$\lim_{b \to 0} \frac{f'(x+b)-f'(x)}{b} = f''(x) = 1,$$

emiatt $f'(x)=x+c$ és $f(x)=\frac{1}{2}x^2+cx+d$. $f(0)=0$ miatt $d=0$, $f(1)=1$ miatt $c=\frac{1}{2}$.

A feltételből egyértelműen következett, hogy

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x = \frac{x(x+1)}{2}.$$

Ez valóban kétszer differenciálható, $f(1)=1$ és bármely $a, b \in \mathbf{R}$-re:

$$f(a+b) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} = \frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2+a+b) = \frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}+ab =$$

$$= f(a)+f(b)+ab.$$

Megjegyzés:

A következő megoldás a „legalább kétszer differenciálható" feltétel helyett f-ről csak annyit használ fel, hogy folytonos.

II. megoldás:

Egyszerűen adódik: $f(0)=0$. Legyen r tetszőleges valós szám. A feltétel felhasználásával

$$f(2r) = f(r+r) = f(r)+f(r)+r^2 = 2f(r)+r^2.$$

Hasonló módon járjunk el $f(3r)$, $f(4r)$, ... esetben is, így a következő sejtéshez jutunk:

$$f(nr) = n \cdot f(r)+\frac{n(n-1)}{2}r^2 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezt teljes indukcióval igazoljuk: $n=1$ esetben igaz;

$$f((n+1)r) = f(nr+r) = f(nr)+f(r)+nr^2 =$$

$$= nf(r)+\frac{n(n-1)}{2}r^2+f(r)+nr^2 = (n+1)f(r)+\frac{(n+1)n}{2}r^2.$$

Legyen $r=1$, ekkor a pozitív egész n számokra

$$f(n) = n+\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Legyen ezután $r=-1$, erre

$$0 = f(0) = f(1-1) = f(1)+f(-1)-1,$$

ebből $f(-1)=0$; és minden $-n$ negatív egészre

$$f(-n) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(-n)(-n+1)}{2}.$$

Legyen végül $r=\frac{p}{q}$ racionális szám ($p\in\mathbf{Z}$, $q\in\mathbf{N}$), ekkor

$$f(q\cdot r)=f\left(q\cdot\frac{p}{q}\right)=f(p)=q\cdot f\left(\frac{p}{q}\right)+\frac{q(q-1)}{2}\left(\frac{p}{q}\right)^2,$$

ebből $f(p)=\frac{p(p+1)}{2}$ felhasználásával:

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}\frac{p+1}{2}-\frac{q-1}{2}\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{q}\left(p+1-(q-1)\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}+1\right).$$

Az előzők szerint az $f(x)$ függvény minden r racionális helyen egyértelműen meghatározott és

$$f(r)=\frac{r(r+1)}{2}.$$

A folytonos függvényt viszont a racionális helyeken felvett függvényértékei

$$\lim_{r\to x} f(r)=f(x)$$

miatt egyértelműen meghatározzák, tehát legfeljebb egy — a feladat feltételeinek eleget tevő — függvény létezik. Az $f(x)=\frac{x(x+1)}{2}$ függvény folytonos, és a többi feltételt is kielégíti.

7. feladat

Egy derékszögű háromszög mindegyik oldalának mérőszáma egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az ilyen háromszögekben a két hegyesszög mérőszámának aránya irracionális szám!

Megoldás:

Jelölje a derékszögű háromszög befogóinak mérőszámát a és b, az átfogóét c. Feltehető: $(a, b, c)=1$. A pitagoraszi számhármasok elméletéből ismert, hogy ekkor a, b, c páronként relatív prímek és c páratlan. Jelöljük φ-vel a b oldallal szemközti szög mérőszámát, és a feladat állításával ellentétben tegyük fel, hogy a két hegyesszög mérőszámának aránya racionális:

$$\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\varphi}=\frac{p}{q},$$

ahol p és q pozitív egész számok. Ebből átrendezéssel

$$(p+q)\cdot\varphi=q\frac{\pi}{2}$$

adódik. Eszerint léteznek olyan n és k pozitív egész számok, amelyekre $n\varphi=2k\pi$. Ezzel ekvivalensek az alábbiak:

$$\cos n\varphi+j\cdot\sin n\varphi=1;$$

$$(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi)^n=1;$$

$$\left(\frac{a}{c}+j\cdot\frac{b}{c}\right)^n=1;$$

$$(a+jb)^n=c^n.$$

A valós részek egyenlőségéből

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^i\binom{n}{2i}a^{n-2i}\cdot b^{2i}=c^n,$$

$b^2=c^2-a^2$ felhasználásával pedig a

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^i \binom{n}{2i} a^{n-2i}(c^2-a^2)^i = c^n$$

egyenletet kapjuk. Végezzük el az egyes tagokban a hatványozást és a szorzást! Gyűjtsük össze az a^n-t tartalmazó tagokat, a többi tagban c legalább másodfokon szerepel:

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2i} \cdot a^n + c^2 \cdot P(a, c) = c^n,$$

ahol $P(a, c)$ az a és c változók $(n-2)$-edfokú polinomja. Felhasználva a^n együtthatóinak összegére a

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}$$

ismert összefüggést, egyenletünk így alakul:

$$2^{n-1}a^n = c^2(c^{n-2} - P(a, c)).$$

A jobb oldal osztható c-vel, a bal oldal viszont — feltevéseink szerint — nem. Ez ellentmondás.

GÁDOR ENDRÉNÉ
ny. egyetemi adjunktus
BME

Beszámoló a CIEAEM

(A Matematika Tanításának Tanulmányozására és Jobbá Tételére Alakult Nemzetközi Bizottság)

1982. évi találkozójáról

Alcímnek azt írhatnám: amennyit én láttam, illetve hallottam belőle. Ugyanis olyan zsúfolt volt a találkozó programja, hogy egy-egy résztvevő az előadásoknak csak kis hányadát tudta meghallgatni.

Az összejövetelt a franciaországi Orléans-ban tartották 1982. július 31-től augusztus 6-ig. A programban szerepelt három plenáris előadás; 62 egyórás előadás, amelyet csak úgy lehetett bezsúfolni a 6 félnapba, hogy egy időben 5 hangzott el; valamennyi altéma közös vitája (1—1 óra); a szokásos ötletvásár; egy egész napos kirándulás; és végül az utolsó nap délelőttjén a záróülés.

Néhány estén matematikai filmeket vetítettek, de ugyanebben az időben ülésezett a CIEAEM Intéző Bizottsága, ezért a Bizottság tagjai (mint jómagam is), nem tudták megnézni a filmeket.

Az összejövetel iránt az eddiginél is nagyobb érdeklődés mutatkozott. Ez nem annyira a résztvevők számában (bár ez is jóval meghaladta a 200-at), mint inkább az előadások számában mutatkozott meg. Ez várható volt a téma, illetve altémák ismeretében. Az összejövetel fő témája a következő volt:

Az eszközök és a médiák szerepe a matematika tanításában: a jelenlegi helyzet és a perspektívák.

Az altémák:

1. Hogyan fejlődött a tankönyvek, feladatlapok stb. tartalma és felhasználása, és hogyan kellene fejlődnie?

2. A matematika tanulásában alkalmazott manipulációs eszközök használatának és kialakításának feltételei.

3. Mennyiben segítik az audiovizuális eszközök a matematika tanulását?

4. Hogyan módosíthatják a zsebszámológépek és a személyi számítógépek az iskolai gyakorlatot?

5. A médiák és a matematikai kultúra elterjedése.

A megnyitó ülésen *Larry Z. Hatfield* (USA) tartott előadást a számítógépek elterjedéséről és felhasználásáról a matematika oktatásában. A gépek felhasználása már most is igen nagy változatosságot mutat. Két jellegzetes fajtáját különbözteti meg a felhasználásnak, annak megfelelően, hogy a tanulók vagy a tanár dolgozik-e a géppel. A tanulók számára a gép a következő lehetőségeket nyújtja: gyakorlás, a tanulás irányítása, bizonyos helyzetek szimulálása, játékok, demonstráció, tájékoztatás, ismeretek közlése, értékelés. A gépi programot készítheti a tanár, de készíthetik a tanulók. A tanár számára a következő segítséget nyújtja a gép: tesztet készít, a tananyag egy részletét adja, a teszteket értékeli és elemzi, kijavítja. Ez maga után vonja a tanár szerepének megváltozását a tanítási órákon. A gép használatát pedig úgy kell beilleszteni a matematika tanításának folyamatába, hogy a matematikai ismeretek kiépítésében, a tanítás céljainak megvalósításában, a teljes tantermi munkában és a matematika tanulás-tanítással kapcsolatos elgondolásaink konkretizálásában maximális segítséget adjon tanárnak és diáknak.

A. I. Weinzweig (USA) azt vizsgálta, hogy milyen lehetőségei vannak a kisszámítógép használatának a matematikaórákon. Rendszeresen áttekintette a felhasználás lehetőségeit. A gép használatával a matematikatanítás egész természete megváltozik, az órai munka meggyorsul. Látott órákat, ahol a tanulók passzívan végigcsinálták az egész gépi programot anélkül, hogy tudták volna, mit csinálnak. De látott olyan órákat is, ahol értelmesen használták a gépet. Kérdés, hogy mennyiben van a gépben több lehetőség, mint a feladatlapban. Többlet benne az, hogy dinamikusan világítja meg a tananyagot. Jól változtathatók a paraméterek, jól mutatja a közelítő megoldás lényegét. Megmutatja bizonyos helyzetek, összefüggések szerkezetét. Könnyű a tanulók számára a logo nyelvvel való programozás, és miközben maguk készítenek programokat, jó kérdéseket találhatnak, beleláthatnak az egyes anyagrészek lényegébe. Jól felhasználható a gép bizonyos helyzetek szimulálására (pl. pénzdobálás sok pénzérmével stb.). Nagyon hasznos a tanulók és a gép „párbeszéde", létrehozhatnak probléma-helyzeteket, új összefüggéseket, könnyebben kialakulnak új fogalmak, fejlődik a gondolkodási készség.

W. Higginson (Kanada) ismertette a logo nyelv lényeges vonásait. Ez az első gépi nyelv, amelyet kisgyerekek oktatása számára készítettek. Könnyen elsajátítható, már kevés jellel és kevés fogalommal is jól használható (kisgyerekek ezeket néhány óra alatt elsajátítják), de tovább bővíthető. Az előadó bemutatott néhány matematikai fogalmat és jelölést logo nyelven, amelyek alkalmazása elég ahhoz, hogy a tanulók használni tudják a gépet.

P. Bowie (Nagy-Britannia) előadásában a zsebszámológépet abból a szempontból vizsgálta, hogyan lehet alkalmazni a „próba és tévedés" módszerre, azaz hogyan lehet kipróbálni, hogy egy elgondolásunk, egy kérdésre adott válaszunk helyes-e. Például mielőtt megállapítanánk egy formulát, hasznos lehet, ha előzőleg a géppel kipróbáljuk, „játszunk" a szóban forgó függvénnyel. Jól tudta használni a gépet, amikor egy eredményt minél jobb közelítéssel kellett megkapni. Gyakran szükség van arra is, hogy egy-egy megoldást sok esetben végigpróbáljunk, ha az eredmény szokatlan, nem az, amit vártunk. Ilyenkor jó segítség a gép. Függvényvizsgálatoknál is jól tudta használni a gépet konkrét értékek kiszámí-

tására, mielőtt az analízis eszközeivel kezdtek volna hozzá a vizsgálathoz. Használták a gépet egyenletek iterációs megoldásához. Sorozatok, sorok konvergenciájának algebrai vizsgálata előtt az eljárást géppel próbálták ki, ezáltal a tanulók jobban megértették a lényeget. A gép használata azt is lehetővé tette, hogy nagyszámú adattal végezzenek el statisztikai vizsgálatokat. Elsőrendű differenciálegyenletek megoldásakor a gép előzetes használata révén a tanulók jobban megértették magát a problémát is.

Több előadó elmondta, hogyan és mire használja a zsebszámológépet a matematikaórákon. Néhány ilyen előadás címe:

Matematikai fogalmak bevezetése számítógép segítségével egy közgazdasági téma tanulmányozása során.

Határérték és a számítógép.

Zsebszámológép használata feladatlapokkal 14 éves tanulóknál.

A logaritmusfüggvény és a zsebszámológép.

Taylor- és MacLaurin-sorok zsebszámológéppel.

Feladatmegoldás zsebszámológép használatával.

A zsebszámológép és a térmértan tanítása.

Az előadásoknak több, mint a fele foglalkozott a számítógépek használatával. Az ötletvásáron is a legnagyobb sikere a kis személyi számítógépeknek volt. A „vásár" látogatói sorba álltak egy-egy gépnél, hogy néhány percig játszhassanak vele.

M. Otte (NSZK) a tankönyvek szöveganalízisével foglalkozott egy plenáris ülésen. Courant—Robbins: Mi a matematika? című könyvéből ragadta ki az összemérhető távolságokra vonatkozó sorokat, majd ugyanezt megfogalmazta konkrét példákkal. A második szöveg — magyarázta az előadó — könnyebben olvasható, nem jelent problémát, de mivel nem jut el az általánosításig, nem létesít kapcsolatot a tudomány és a tanítás között. A matematikában fontos szerepet játszik az első fajta, ún. nyitott szöveg. Fontos, hogy a szöveg ne csak leírja, hanem „megjelenítse" a matematikai tartalmat rövidítésekkel, jelölésekkel. Ez megkönnyíti az olvasott szöveg megértését.

A tankönyvekkel foglalkozott *G. Glaeser* (Franciaország) előadása is. A strasbourgi IREM-ben* folyó tankönyvírás tapasztalatai és az ott folyó pedagógiai kutatások alapján elemezte a matematika tankönyveket. Szerinte előnyösebb, ha nem egy ember írja a tankönyvet, hanem egy kisebb csoport. Vezessen be a könyv lehetőleg kevés új szót, kifejezést, de ezeket használja gyakran! Ösztönözze a tankönyv aktív munkára a tanulókat! Ahol lehet, bízza a tanulókra a problémák megoldását, a kérdések megválaszolását! Ne legyen szájbarágó, legyen „provokatív"! Hogy mégis megtalálják benne a tanulók a számukra fontos ismereteket, elválasztva a többi résztől kb. 15—20 oldalon keresztül leírták a tudnivalók lényegét (ez nagyjából a mi Munkatankönyveink Kislexikonának felel meg), ahol a tanulók utánanézhetnek a definícióknak, képleteknek stb. A könyv többi részében megtartották a kérdező, provokatív formát. A feladatok kiválasztásánál vigyáztak arra, hogy ne adjanak sorozatosan egyhangú gyakorló feladatokat, hanem legyenek ezek változatosak és tegyék lehetővé a tanár számára, hogy differenciáltan tudjon feladatokat adni a tanulóknak. Az ábrákra épp olyan nagy gondot fordítottak, mint a szövegre. Minden ábrának megvan a pedagógiai fontossága.

F. Spagnolo (Olaszország) A matematika és a természettudományok integrált oktatása a középiskolában című előadásában olyan kísérletről számolt be, amelyet ezeknek a tárgyaknak a tanárai közösen végeztek. Céljuk az e tárgyakban alkalmazható közös módszerek és eszközök kialakítása volt. Ennek előfel-

* Institut pour les Recherches de l'Éduction Mathématique (Matematikatanítási Kutatóintézet)

tétele: ugyanaz a tanár tanítsa e tárgyakat, valamennyi tárgy tanításában ugyanaz legyen a cél és ugyanazok a didaktikai eljárások. Tanításuk, illetve a kísérletek célja: képessé tenni a tanulókat önálló ismeretszerzésre, összefüggések feltárására, összetett jelenségek elemzésére, a logikai műveletek felismerésére és használatára a megismerés különböző fázisaiban. Ennek érdekében az egész tananyagot (valamennyi tárgyban) munkalapokon dolgozták fel. Ezek szerkezete:

1. rész: probléma (megfelelő manipulációval, de az nem szerepel a feladatlapokon);
2. rész: információ nyújtása;
3. rész: összefoglalás, áttekintés.

Az első részt az iskolában kiscsoportokban vagy önállóan, illetve otthon dolgozzák fel. A harmadik rész módot ad az értékelésre: 25 kérdést tartalmaz, 5-5 lehetséges válasszal. A válaszokat számítógéppel dolgozzák fel.

Mások is beszámoltak feladatlapokkal végzett kísérletekről. Általában a következő vélemény alakult ki a feladatlapokról:

A feladatlapokkal való munka nemcsak annyit jelent, hogy a tanulók összehordanak különféle ismereteket, hanem azt is, hogy — ha kell — a tanár magyarázatot fűz ezekhez, kijavítja a hibákat, tévedéseket. Olykor élénken vitatkoznak egy-egy kérdésen. A feladatlap lehetővé teszi, hogy a gyerekek fokozatosan közelítsenek meg nehéz problémákat. Hatékony segítséget ad bizonyos kérdések megválaszolásához, összefüggések felismeréséhez. A tanár számára az értékelésnek jó eszköze. Hozzásegít ahhoz, hogy az elsajátított ismeretek színvonalát lehetőleg pontosan állapítsa meg. Jó eredményt hoznak a feladatlapok azoknál a tanulóknál, akiknek kifejezésbeli nehézségeik vannak, hiányos a matematikai előképzettségük, vagy nehezen tudnak beilleszkedni a közösségbe.

F. Löwenthal (Belgium) olyan kísérletről számolt be, amelyet 6—8 éves gyerekekkel végeztek. A kísérlet lényege a következő: megpróbáltak az első osztály első órájától kezdve jó kommunikációs kapcsolatot létrehozni tanár és diák között. A „szó" erre nem alkalmas, mert felnőtt és gyerek a szavakat nem mindig ugyanabban az értelemben használja, tehát nem értik meg egymást. A jó manipulációs eszközök alkalmasabbak, emellett elősegítik a gyerekek logikai képességének és a matematikai nyelvnek a kialakulását is. Például első osztályosok a szöges tábla segítségével felfedezték a síkbeli derékszögű koordináta-rendszert. Adott koordináták segítségével rájöttek sokszögek, valamint néhány geometriai transzformáció különböző tulajdonságaira. Jól használható eszköznek bizonyult a kísérletek során második osztályban az ún. Cohors—Fresenborg-féle „vonat". Ez kis, összeilleszthető figurákból áll, és sokféleképpen lehet játszani vele. Például a tanár megad a táblán gráffal egy ábrát, ennek megfelelően kell mozgatni a vonatot. Sok gyerek rájön a szabályra, amit a gráf megad, sőt arra is, hogy többféle úton juthat el a vonat a gráffal megadott véghelyzetbe. Ezzel az eszközzel „véges automatákat" lehet szerkeszteni (természetesen ezt a szót nem használják). Többen eljutottak a mod 3 maradékosztályokkal való számolásig is.

A tanárok képzéséhez készült filmeket mutatott be *R. Crépin* (Franciaország). Az egyik például a tizedestörtes írásmód bevezetését mutatta. 10—11 éves gyerekek a $\sqrt{38}$-at közelítették. Kellemetlen szorzások adódtak olyan törtekkel, amelyeknek a nevezője mindig 10 valamilyen hatványa volt. A gyerekek javasoltak többféle rövidebb írásmódot, végül megállapodtak a „szokásos"-ban, amely ugyancsak szerepelt a gyerekek javaslatai között. A „Testek és felületek" című film bemutatott geometriai testeket a művészetben, a természetben, a gyakorlatban. Kivágtak metszeteket sajtból, habszivacsból stb.

A magyar résztvevők közül *Kovács Zoltán* tartott előadást általános iskolai tankönyveink tanításánál alkalmazott

módszerekről, a szemléltető és manipulációs eszközökről.

Az augusztus 6-i záróülésen értékelték az elmúlt hét munkáját, tapasztalatait, valamint megbeszélték a jövő évi programot. 1983-ban a CIEAEM Lisszabonban rendezi meg szokásos évi összejövetelét. A téma a következő lesz: a matematika módszertana, az iskolai és a társadalmi realitás.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10. II. 10, 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1023. Melyik az a tízes számrendszerbeli $\overline{abc}$ szám, amely a $\overline{bca}$ és $\overline{cab}$ számok számtani közepe?

Halász Ferencné, Budapest

1024. Bizonyítsuk be, hogy minden m, n pozitív egészre

$$m(m+1)n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)-n(n+1)m^2(m+1)^2(2m^2+2m-1)$$

osztható 1440-nel!

Bencze Mihály, Brassó

1025. A hat darab szabályos háromszöglap határolta kettős-gúla felületét néhány éle mentén felvágva, síkba kiteríthető, *összefüggő* hálózatát kapjuk. Hány különböző (nem egybevágó), összefüggő hálózata van a kettősgúlának és mely élei mentén kell felvágnunk, hogy ezeket a hálózatokat nyerjük?

1026. Igazoljuk, hogy egy tetraéder belsejében levő bármely P ponthoz található a tetraédernek egy olyan éle, amely e pontból olyan szög alatt látszik, amelynek koszinusza nem nagyobb, mint $-\frac{1}{3}$!

Kvant

1027. Tekintsük az $F_1=F_2=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ módon definiált Fibonacci-sorozatot. Konvergens-e a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}{n\cdot F_n^2}$$

sor?

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

1028. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\frac{5}{4}-\cos x\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{2^k} \leqq \frac{1}{4}+\frac{3}{2^{n+2}}$$

minden valós x-re és n természetes egészre!

Bíró Béla, Barót

Feladatmegoldások (999—1004.)

999. Van-e olyan konvex sokszög, amelyet véges sok konkáv négyszögre darabolhatunk?

Megoldás: A feltett kérdésre adott válaszunk: nincs ilyen konvex sokszög.

Indirekt fogunk okoskodni: tegyük fel, hogy van olyan konvex sokszög, amelyet véges sok — mondjuk k darab — konkáv négyszögre daraboltunk.

1. A felbontásban szereplő konkáv négyszögek konkáv szögcsúcsa nem lehet a konvex sokszög határán, mivel a határ bármely pontja egy legfeljebb egyenes szög, tehát konvex szög csúcsa lehet az eredeti sokszög konvexitása miatt.

2. A felbontásban szereplő négyszögek konkáv szögénél levő csúcsai különbözőek, mert két — közös csúcsú — konkáv szög összege 2π-nél nagyobb.

Az 1. és 2. megállapításainkból következik, hogy minden konkáv szögcsúcs a sokszögnek belső pontja, és pontosan k darab ilyen, egymástól különböző pont van.

Ennek alapján a konvex sokszög Σ szögösszege nem lehet nagyobb, mint a k darab négyszög szögösszegének és a belső csúcsok száma 2π-szeresének a különbsége.

A 2. miatt a belső csúcsok száma legalább k, így

$$\Sigma \leqq k \cdot 2\pi - k \cdot 2\pi = 0,$$

ami lehetetlen, feltevésünk tehát hamis.

A megoldók száma: 5.

Bartha Gábor, Szentendre

1000. Legyen

$$x_n = \frac{1}{2}(3^{2^n}+1).$$

Határozzuk meg az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok legkisebb közös többszörösének utolsó két számjegyét!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Írjuk fel a következő szorzatot:

$$4\prod_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{3^2-1}{2}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{3^{2^i}+1}{2}.$$

A jobb oldalon tényezőről tényezőre végezzük el a szorzást, így

$$4x_1 x_2 \ldots x_{n-1} = \frac{3^{2^n}-1}{2^{n-1}},$$

amiből

$$x_n = \frac{3^{2^n}+1}{2} = 2^n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} + 1,$$

azaz

$x_0 = 2$ miatt

$$x_n = 2^{n-1} x_0 x_1 \ldots x_{n-1} + 1. \qquad (*)$$

Ebből rögtön következik, hogy minden $n \geqq 2$-re, $x_1 = 5$ miatt

$$x_n = 10k+1 \quad (k \text{ pozitív egész}).$$

Most belátjuk, hogy az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ számok M legkisebb közös többszöröse e számok szorzata. E tényből következik az előzőek alapján, hogy az M utolsó két jegyéből alkotott szám a 10.

Jelölje az a, b számok legkisebb közös többszörösét, illetve legnagyobb közös osztóját $[a, b]$, illetve $(a; b)$.

Felhasználva az ismert

$$(a; b) \cdot [a, b] = ab,$$

továbbá az

$$[a, b, c] = [[a; b], c]$$

azonosságokat:

$(x_0; x_1)=(2; 5)=1$ miatt $[x_0; x_1]=10$, tehát (*) miatt $[x_0; x_1; x_2]=[[x_0; x_1]; x_2]=[10; x_2]=10x_2=$ $=x_0x_1x_2$.

Ebből teljes indukcióval következik állításunk.

A megoldók száma: 20. *Tuzson Zoltán, Marosvásárhely*

1001. Melyek azok az $(x_1, x_2, ..., x_n)$ valós n-esek, amelyek kielégítik az alábbi egyenlőtlenségrendszert?

$$x_k^2+1 \leqq x_{\varphi(k)}+x_{\psi(k)}, \quad 1 \leqq k \leqq n.$$

A φ és a ψ az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaznak önmagára való bijektív leképezései (permutációi).

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: Tekintsük a következő összeget:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k^2+1).$$

A feladatbeli feltétel miatt erre az összegre:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k^2+1) \leqq \sum_{k=1}^{n} (x_{\varphi(k)}+x_{\psi(k)}),$$

tehát

$$n+\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqq 2n \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Ez azonban akkor és csak akkor áll, ha a rendezés utáni

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k-1)^2 \leqq 0$$

teljesül.

A bal oldal nem negatív számok összege, ami akkor és csak akkor nem pozitív, ha valamennyi tag nulla, ha tehát

$$x_k = 1$$

minden k-ra.

Ezek szerint egyenlőtlenség-rendszerünket egyetlen valós n-es elégíti ki, az amely csupa 1-es jegyből áll.

Feladatunk általánosítható a következőképpen: Ha $m<n$ és $1 \leqq k \leqq n$, továbbá

$$\varphi_i\left(i = 1, 2, ..., \binom{2m}{p}\right)$$

az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz permutációi, akkor az

$$x_k^{2m}+1 \leqq \sum_{p=1}^{2m-1} (-1)^{p+1} \cdot \left(x_{\varphi_1(k)}^{2m-p}+x_{\varphi_2(k)}^{2m-p}+...+x_{\varphi_{\binom{2m}{p}}(k)}^{2m-p}\right)$$

egyenlőtlenség-rendszernek egyetlen megoldása van, az $(x_1, x_2, ..., x_n)=(1, 1, ..., 1)$.

Az előbbihez hasonló módon bizonyítjuk.

Bencze Mihály, Brassó

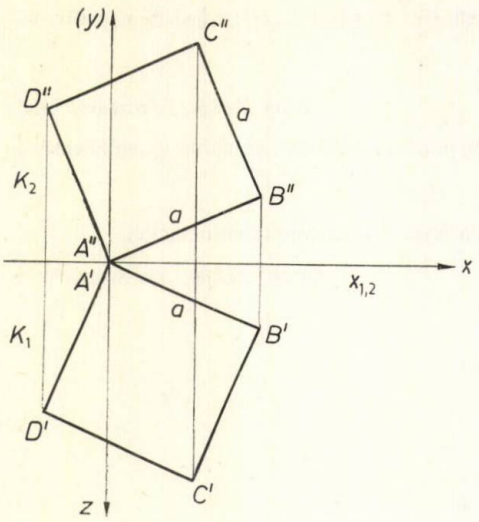
A megoldók száma: 11.

1002. Egy (nem feltétlenül síkbeli) négyszög merőleges vetülete két egymásra merőleges sík mindegyikén 2 egység oldalú négyzet. Mekkora a négyszög kerülete, ha egyik oldala 5 egység hosszú?

Láng Hugó, Székesfehérvár

Megoldás: Bebizonyítjuk, hogy nincs olyan négyszög, amely eleget tesz a fenti feltételeknek.

Legyenek a feladatbeli négyzetek a oldalúak, a négyszög egy oldala pedig b. Mivel mindkét vetület négyzet, ezért a négyszög csak paralelogramma lehet. Ugyanis a négyszög átlóinak felezőpontjaira illeszkedő egyenes a feltételek szerint vetítőegyenese mindkét vetületi síknak, nem lehet tehát mindkét síkra merőleges, ha e felezőpontok különbözőek.



Legyen mindkét vetületi sík a Monge-féle két képsík. Feltehető, hogy a paralelogramma egy csúcsa az $x_{1,2}$ tengelyen van, hiszen a képsík rendszer eltolása a vetületeket ezekkel egybevágó alakzatba viszi. Mivel a paralelogramma b hosszúságú oldalának mindkét képe a hosszúságú szakasz, ezért a paralelogramma eme oldala mindkét képsíkhoz azonos szögben hajlik, következésképpen a paralelogramma csúcsai a képsíkoktól egyenlő távolságra vannak, így a két vetület az $x_{1,2}$ tengelyre szimmetrikus (ábra).

Ábránknak megfelelően $\mathbf{K}_1$ az $[x; z]$ sík, $\mathbf{K}_2$ pedig $[x, (y)]$ sík, ahol (y) a térbeli derékszögű koordinátarendszer y tengelyének leforgatottja az $[x; z]$ síkba.

Ha x jelöli az $A''B''$ szakasz vetületét az $x_{1,2}$ tengelyen, akkor a képpontok koordinátái:

$$A'(0;0;0);\ A''(0;0;0);\ B'(x;0;\sqrt{a^2-x^2});$$

$$B''(x;\sqrt{a^2-x^2};0);\ D'(-\sqrt{a^2-x^2};0;x);$$

$$D''(-\sqrt{a^2-x^2};x;0);$$

$$C'(x-\sqrt{a^2-x^2};0;x+\sqrt{a^2-x^2});$$

$$C''(x-\sqrt{a^2-x^2};x+\sqrt{a^2-x^2};0).$$

Ezek alapján az eredeti négyszög csúcsainak koordinátái:

$$A(0;0;0);\ B(x;\sqrt{a^2-x^2};\sqrt{a^2-x^2});\ C(x-\sqrt{a^2-x^2};x+\sqrt{a^2-x^2};\ x+\sqrt{a^2-x^2});$$

$$D(-\sqrt{a^2-x^2};x;x).$$

Ebből

$$AB = CD = \sqrt{2a^2-x^2} \quad \text{és} \quad AD = BC = \sqrt{a^2+x^2},$$

tehát a négyszög k kerülete:

$$k = 2\left(\sqrt{2a^2-x^2}+\sqrt{a^2+x^2}\right).$$

Ha az AB oldal hossza b, akkor

$$2a^2-x^2 = b^2$$

miatt

$$k = 2\left(b+\sqrt{3a^2-b^2}\right).$$

Ugyanerre jutunk, ha $AD=b$.
Minthogy

$$2a^2-b^2 \geqq 0 \quad \text{és} \quad a \leqq b$$

kell legyen, ezért az adatoknak a

$$\frac{\sqrt{2}b}{2} \leqq a \leqq b$$

feltételt ki kell elégíteniük.

Az $a=2$, $b=5$ választás erre képtelen, nincs tehát az eredeti feladatnak megfelelő négyszög.

Csorba Ferenc, Győr

Megjegyzés: A feladat szövegében előfordult sajtóhibáért Olvasóink szíves elnézését kérjük.

A megoldók száma: 6.

1003. Legyenek $H_1, H_2, \ldots, H_{1066}$ a H véges halmaz olyan részhalmazai, amelyekre $|H_i| > \frac{1}{2}|H|$, minden $1 \leqq i \leqq 1066$-ra! Bizonyítsuk be, hogy létezik a H-nak tíz olyan $h_1, h_2, \ldots, h_{10}$ eleme, hogy valamennyi H_i részhalmaz tartalmaz ezek közül legalább egyet! (Az $|X|$ az X halmaz számosságát jelöli.)

Megoldás: Legyen a H halmaz számossága n, és tekintsük a H tetszőleges k darab olyan H_i részhalmazát, melyek számossága nagyobb, mint $\left[\frac{n}{2}\right]$ ($\frac{n}{2}$ egész része).

(1) Bebizonyítjuk, hogy a H halmaznak van oly eleme, mely eleme a $H_1, H_2, \ldots, H_k$ halmazok közül legalább $\left[\frac{k}{2}\right]+1$-nek.

A H_i $(1 \leqq i \leqq k)$ halmazok elemei közül hagyjunk el annyit (közömbös, hogy melyeket), hogy valamennyi H_i számossága $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ legyen! Az így kapott (nem feltétlenül különböző) részhalmazokat jelölje rendre: $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Ha belátjuk, hogy van olyan $h \in H$ elem, mely az A_i $(1 \leqq i \leqq k)$ halmazok közül legalább $\left[\frac{k}{2}\right]+1$-ben előfordul, akkor ezzel (1)-et bizonyítottuk.

Vezessük be a következő jelölést:
Jelölje $f(a_i)$ az a_i elem összes előfordulásainak a számát az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ halmazokban $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Ekkor

$$0 \leqq f(a_i) \leqq k.$$

Mivel

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) = k\,|A_i| = k\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right),$$

ezért

$$n\left(\max_{1 \leqq i \leqq n} f(a_i)\right) \geqq k\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right).$$

Legyen

$$\max_{1 \leqq i \leqq n} f(a_i) = t \qquad (1 \leqq i \leqq n),$$

tehát

$$k\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right) \leqq t \cdot n,$$

azaz

$$t \geqq \frac{k}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right) > \frac{k}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{k}{2},$$

t azonban egész szám, ezért

$$t \geqq \left[\frac{k}{2}\right]+1.$$

Ezzel az (1) állítást igazoltuk.

Jelöljük most $g(k)$-val ama H-beli elemek minimális számát, melyekre teljesül, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ halmazok mindegyike tartalmaz legalább egyet közülük.

Bizonyítottuk, hogy ekkor

$$g(k) \leqq 1+g\left(k-\left[\frac{k}{2}\right]-1\right),$$

elhagyva ugyanis a k darab A_i halmazból $\left[\frac{k}{2}\right]+1$ olyan halmazt, amelynek — előzőek szerint — van közös eleme, a fennmaradó $k-\left[\frac{k}{2}\right]-1$ A_j halmaznak e közös elemtől nem feltétlenül különböző elemeire ismét igaz az (1) állítás.

A

$$g(1) = g(2) = 1$$

nyilvánvalóan igaz, hiszen bármely két A_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ halmaznak van közös eleme, mert számosságuk $\left[\frac{n}{2}\right]+1$. Ezek alapján:

$$g(1066) \leqq 1+g(532) \leqq 1+1+g(265) \leqq 1+1+1+g(132) \leqq 4+g(65) \leqq 5+g(32) \leqq 6+g(15) \leqq$$

$$\leqq 7+g(7) \leqq 8+g(3) \leqq 9+g(1) = 10.$$

Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzés: Bizonyított (1) tételünk alapján 1066-nál több H_i halmazt is „felfűzhetünk". Például: $g(2046) \leqq 1+g(1022) \leqq 2+g(510) \leqq 3+g(254) \leqq 4+g(126) \leqq 5+g(62) \leqq 6+g(30) \leqq 7+g(14) \leqq$ $\leqq 8+g(6) \leqq 9+g(2) = 10$.

Bartha Gábor, Szentendre

A megoldók száma: 3.

1004. Bizonyítsuk be, hogy bármely m egész és p páros természetes számra a

$$\{(\sqrt{16m^4-40m^3+441m^2-520m+2705}+4m^2-5m+52)^{p+1}\}$$

törtrész első $2p+1$ jegye zérus!

Bíró Béla, Barót

Megoldás: Vegyük észre, hogy a négyzetgyök alatti kifejezés

$$(4m^2-5m+52)^2+1$$

alakba írható. Vezessük be az

$$a := 4m^2-5m+52$$

jelölést.

A binomiális tétel alkalmazásával

$$(\sqrt{a^2+1}+a)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} a^k (\sqrt{a^2+1})^{p+1-k}$$

$$(\sqrt{a^2+1}-a)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \binom{p+1}{k} a^k (\sqrt{a^2+1})^{p+1-k}.$$

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat; a kapott egyenlet jobb oldala nem tartalmaz gyökös kifejezéseket, azaz

$$(\sqrt{a^2+1}+a)^{p+1}-(\sqrt{a^2+1}-a)^{p+1}$$

egész szám, így mindkét tag törtrésze egyenlő, azaz

$$\{(\sqrt{a^2+1}+a)^{p+1}\} = \{(\sqrt{a^2+1}-a)^{p+1}\},$$

és emiatt vizsgálható a bal oldali törtrész, a másik helyett.

Bebizonyítjuk, hogy ha $0<a<b$, akkor

$$\sqrt{a^2+1}-a > \sqrt{b^2+1}-b.$$

Ekvivalens átalakításokkal:

$$b-a > \sqrt{b^2+1}-\sqrt{a^2+1},$$

$$(b-a)^2 > b^2+a^2+2-2\sqrt{(b^2+1)(a^2+1)},$$

$$\sqrt{(b^2+1)(a^2+1)} > 1+ab,$$

$$a^2b^2+a^2+b^2+1 > 1+2ab+a^2b^2,$$

azaz

$$(a-b)^2 > 0,$$

ami nyilvánvaló.

Az

$$a = 4m^2-5m+52 = 4\left(m-\frac{5}{8}\right)^2+50\frac{7}{16}$$

miatt, mivel a egész

$$a \geqq 51,$$

minden m egészre.

Elegendő tehát az $a=51$ esetet vizsgálni, ami $m=1$-re bekövetkezik.

A

$$\sqrt{51^2+1}-51 = \frac{1}{\sqrt{51^2+1}+51} < \frac{1}{50+50} = 10^{-2}$$

miatt

$$\{(\sqrt{51^2+1}-51)^{p+1}\} < \{(10^{-2})^{p+1}\} = 10^{-2(p+1)},$$

amiből következik a feladat állításának helyessége.

Kamarás Lajos, Pécs,
Róka Sándor, Nyíregyháza,
Varga István, Nagyszalonta

Megjegyzés: A feladat általánosítható: Legyen $f(m)$ olyan egész együtthatós polinom, amelyre $(fm) \geqq 5 \cdot 10^k$ (k természetes szám), továbbá p nem negatív egész. Ekkor a

$$\{(\sqrt{1+f^2(m)}+f(m))^{p+1}\}$$

első $kp+k+p$ darab számjegye zérus.

Az előző bizonyítás mintájára ugyanis:

$$(\sqrt{1+f^2(m)}+f(m))^{p+1} = A+(\sqrt{1+f^2(m)}-f(m))^{p+1} =$$

$$= A+\frac{1}{(\sqrt{1+f^2(m)}+f(m))^{p+1}} \leqq A+\frac{1}{(10^{k+1})^{p+1}} = A+10^{-(k+1)(p+1)} = A, \underbrace{000\ldots001}_{kp+k+p}$$

Bencze Mihály, Brassó
Szánthó Gyula, Gyula

A megoldók száma: 10.

A megoldók névsora (999—1004.)

Ambrus Gabriella, Budapest (999—1001.); Bagi Gábor, Barcs (1000.); Bartha Gábor, Szentendre (999—1004.); Bencze Mihály, Brassó (1000., 1001., 1004.); Bogdán Zoltán, Cegléd (1000—1002.); Csorba Ferenc, Győr (1000., 1002.); Csörsz Sándor, Dunakeszi (1000., 1002.); Hajdú Ferenc, Nagykálló (1000.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (1000., 1001., 1004.); Kamarás Lajos, Pécs (999—1004.); Kondor Judit (1000.); dr. Major Pál, Budapest (1000.); Major Piroska, Budapest (1000., 1001.); Máté Bálint, Pécs (1004.); Róka Sándor, Nyíregyháza (1000., 1001., 1003., 1004.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1000.); Szánthó Gyula, Gyula (999—1002., 1004.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1000., 1001., 1004.); Varga István, Nagyszalonta (1000., 1001., 1004.); Zalán Péterné, Budapest (1000.); Zsidó György, Kolozsvár (999., 1000.).

Harmadik közlemény a Nemzetközi Matematikai Kongresszusról

Lapunk 1982. évi 2. számában közlemény jelent meg a Nemzetközi Matematikai Kongresszusról, 3. számában pedig annak elhalasztásáról. Nemrégiben érkezett meg a Kongresszus Szervező Bizottságának harmadik közleménye, amelyből megtudhatjuk, hogy a Kongresszust *1983. augusztus 16-tól 24-ig* fogják megtartani az eredetileg tervbe vett helyen, azaz a varsói Kultúra és tudomány palotájában.

A Szervező Bizottság hivatkozott harmadik közleménye igen sok részletes tájékoztatást nyújt a Kongresszus tervezett szakmai és társasági programjáról. Helyszűke miatt csak a leglényegesebbekre szorítkozunk az alábbiakban.

A szocialista országok állampolgárai zlotyban (zl) fizethetik mind a részvételi díjat, mind a Kongresszusi Iroda által felajánlott szolgáltatások árát.

A részvételi díj	1983. május 31. előtt	azután
rendes tagok számára	5200 zl	7000 zl
kísérő személyek számára	3000 zl	4000 zl.

Szállásköltség

Azoknak a résztvevőknek, akik az ORBIS Kongresszusi Irodáján keresztül foglalnak szobát, a következő összegű szállodafoglalási díjat kell fizetniük: a Lux Intercontinental kategóriától az I. A, B vagy C kategóriáig bezárólag 2200 zl-t, a többiekben pedig 450 zl-t.

Kategória	Egyágyas szoba		Kétágyas szoba	
	fürdőszobával	fürdőszoba nélkül	fürdőszobával	fürdőszoba nélkül
Lux Intercontinental	4400		4800	
Intercontinental	3220		3360	
I. A	2380	1100	3100	1350
B	2250		2630	
C	1950		2630	
II. A, B, C	830—1180	760—980	1270—1910	990—1120

Ára: 5,50 Ft INDEX: 25 565

Diákszállók: Valamely diákszállóban csak tíznapos tartózkodásra lehet igénybe venni elhelyezést, mégpedig augusztus 15-i be- és augusztus 25-i kiköltözéssel. A szállásdíj összegét még nem állapították meg pontosan, annyi azonban bizonyos, hogy a tíz napra nem fogja meghaladni a 4000 zl-t. Ez a reggelik árát is magában foglalja.

A fenti táblázat számadatai azt mutatják, hogy hány zlotyba kerülnek a szállodai szobák éjszakánként, reggelivel együtt a szocialista országok állampolgárainak. A Nemzetközi Matematikai Kongresszus bejegyzett részt vevői a Lux Intercontinental kategóriától az I. A, B vagy C kategóriáig bezárólag 15%-os engedményt kapnak a táblázatban feltüntetett árakból 1983. augusztus 14. és 25. között.

Azok számára, akik további részletek iránt érdeklődnek a Kongresszus programjával kapcsolatban, lehetővé tesszük, hogy lapunk szerkesztőségében a hivatalos órák alatt (hétfőtől csütörtökig 8 órától 17 óráig, pénteken 8 órától 15 óra 40 percig) elolvassák a Kongresszus — angol nyelvű — harmadik közleményét. Ilyen közlemény — amely a Kongresszusra történő jelentkezéshez szükséges űrlapot is tartalmazza mellékletben — egyébként a Szervező Bizottságtól igényelhető. Ennek címe: Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warsaw, Poland.

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

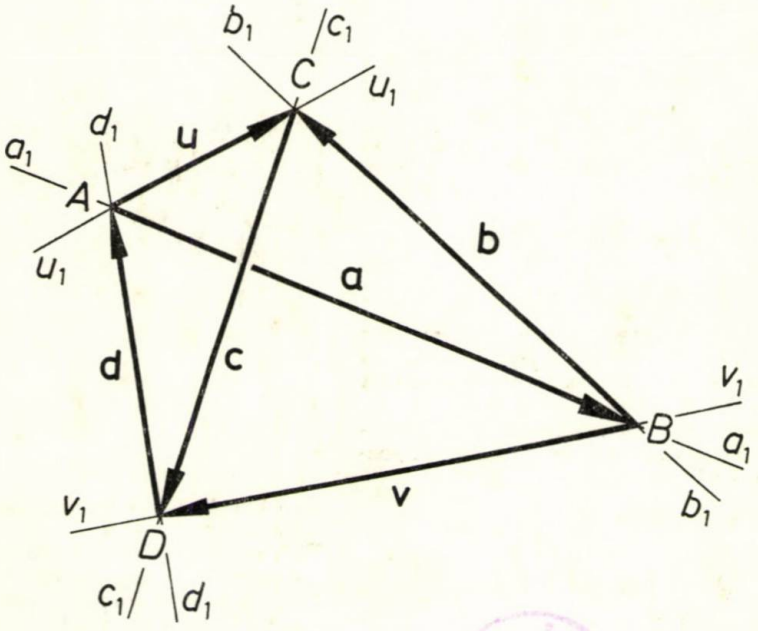
Cser—Imreczené—Pálfy: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos anyagának tanításához* (91 486)	31,50
Cser—Imreczené—Pálfy: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 8. osztályos anyagának tanításához* (91 491)	30,—
Egleszné—Kovácsné—Radnainé—Sztrókayné: *Tanári kézikönyv, általános iskola. Matematika 6.* (84 020)	39,—
Dr. Korányi Erzsébet: *Tanári kézikönyv. Matematika I—II.* (84 048)	31,—
Ligeti—Mosoni: *Törd a fejed, érdemes!* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (1908/1)	13,—
Hámori Miklós: *Halmazok. Matematikai logika* (1991)	9,—
Fried Ervin: *Oszthatóság és számrendszerek* (19 006)	11,—
Dr. Máté László: *Rekurzív sorozatok* (29 243)	11,50
Bognárné—Nemetz—Tusnády: *Ismerkedés a véletlennel* (29 253)	17,—
Lothar Berg: *Másodrendű differenciaegyenletek* (29 254)	10,—
Bereznai Gyula—dr. Varecza Árpád: *Tanárképző főiskolák matematika versenyei II. 1971—1979.* (8164/II.)	21,—
Péter Rózsa: *Játék a végtelennel. Matematika kívülállóknak* (52 489)	31,—
Rédling Elemér: *Geometriai transzformációk* (52 783/II.)	21,50
Peller József—Megyesi László: *Függvények elemi vizsgálata* (52 783/III.)	24,50
Rédling Elemér: *Egybevágósági és hasonlósági transzformációk* (52 783/IV.)	21,—
Kalmár László: *Bevezetés a matematikai analízisbe* 1—2. kötet (52 808)	141,—
Lukács Ottó: *Operációkutatás* (52 899)	71,—
Dr. Lévárdi—Sain: *Matematikatörténeti feladatok* (52 913)	39,—
Így tanítjuk a matematikát I. (83 047/I.)	70,—
Így tanítjuk a matematikát II. (83 047/II.)	70,—

Beszerezhetők

a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 4. Tankönyvboltban (1051 Bp., Október 6. u. 8.)

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1983. április * XXX. évfolyam 2 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:

HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.

Telefon: 211—200

83-596 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Gádor Endréné: Harminc év múltán 33
Tóth László: A differenciált foglalkoztatás lehetőségei az 5. osztályos matematikatanterv tanításában 33
Dr. Kósa András: Az analízis alapvető fogalmainak konstruktív bevezetéséről 43
Lukács Ottó: Keresd a hibát! 49
Munkaközösség: Tanulók önálló feladatmegoldása számítógép segítségével 54
A Bolyai János Matematikai Társulat által a matematikatanárok számára rendezett 1982. évi verseny eredménye 60
FELADATOK 60

СОДЕРЖАНИЕ

Гадор Эндрене: Взгляд на прошедшие 30 лет 33
Тот Ласло: Возможности дифференцированного обучения математике в 5 классе 33
Д-р Коша Андраш: О конструктивном введении основных понятий математического анализа 43
Лукач Отто: Найди ошибку! 49
Авторский коллектив: Учащиеся самостоятельно решают задачи с помощью ЭВМ 54
О соревновании 1982 г. Математического общества им. Яноша Бойаи для учителей математики 60
ЗАДАЧИ 60

INHALT

Frau Piroska Gádor (geb.: *Kurtág*): Nach Verlauf dreißig Jahre 33
Tóth, László: Die Möglichkeiten des differenzierten Unterrichts des Lehrstoffes des neuen Mathematik-Lehrplans für die 5. Klasse der Grundschule 33
Dr. Kósa, András: Über die konstruktive Einführung der grundlegenden Begriffe der Analysis 43
Lukács, Ottó: Finde den Fehler! 49
Arbeitsgemeinschaft: Selbständige Aufgabenlösung von Schülern mittels eines Rechenautomaten 54
Das Resultat des Wettbewerbs, der von der Bolyai János Mathematischen Gesellschaft für die Mathematiklehrer im Jahre 1982 organisiert wurde 60
AUFGABEN 60

GÁDOR ENDRÉNÉ
ny. egyetemi adjunktus
Budapest

Harminc év múltán

1953 augusztus havában, tehát 30 évvel ezelőtt — felelős szerkesztésemmel — indult meg A Matematika Tanítása című folyóirat.

Az Oktatásügyi Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat ezzel a folyóirattal segítséget kívánt adni a matematika szakos tanárok önképzéséhez. A folyóirat célját és feladatait tehát a tanítás során felmerülő mindenkori igények szabták meg. Foglalkoznia kellett — és kell ma is — a matematika elvi-didaktikai kérdéseivel, a tanítás mindennapi gyakorlati problémáival, a tantervi anyag elmélyítésére szolgáló szakmai kérdésekkel mind általános, mind középiskolai szempontból. Ezeknek a feladatoknak megfelelően alakultak ki az egyes rovatok, amelyek nagyrészt a mai napig megmaradtak.

Az elmúlt 30 év alatt lényegében nem változott a folyóirat célja, feladata, de még a formája sem. Változtak viszont a tanításban felmerülő mindennapi problémák, hiszen ez alatt az idő alatt átéltünk néhány tantervi reformot. A Matematika Tanítása első számától kezdve igyekszik segíteni a tanárokat ezeknek a problémáknak a leküzdésében.

Az olvasóktól, kollégáinktól ma is csak azt kérhetem, amit a legelső számban leírtam: szeressék a lapot, érezzék a magukénak, vegyenek részt a szerkesztés munkájában! Csak így lehetséges, hogy a lap betöltse hivatását, és fontos szerepe legyen a matematikatanítás irányításában, segítésében.

A Győr-Sopron megyei
matematikai alkotó munkaközösség nevében
TÓTH LÁSZLÓ vezető szakfelügyelő

A differenciált foglalkoztatás lehetőségei az 5. osztályos matematika-tanterv tanításában

Győr-Sopron megye szakfelügyelői és szaktanári kollektívája sokat gondolkodott azon, hogyan lehetne a matematika iránt támasztott társadalmi és szakmai követelményeknek eleget tenni. A tantárgy korszerűsítése — több évvel a bevezetés óta — még most is az érdeklődés középpontjában van.

Megyénkben 16 matematikatanárból alakult alkotói munkaközösség vizsgálja annak lehetőségét, hogy:

1. Hogyan tudna az általános iskola nagyobb segítséget nyújtani a személyes képességek felszínre hozásához? (IX. kongresszus).

2. A differenciált tantervi (törzs- és kiegészítő) anyag tanítása és követelményrendszere (minimum és optimum szint) milyen módon teljesíthető az adott tanulói és tanári segédletek mellett az 5. osztályos matematikatanításban?

3. A gimnáziumokban, szakközépiskolákban és a szakmunkásképzőkben végzett felmérésekből az általános iskolák felé jelzett hiányosságok hogyan pótolhatók?

4. Az előző tanévben 16 iskolában végeztünk tájékozódó felmérést az 5. osztályos matematika anyagából. A minimum és optimum szintre épülő feladatsorok teljesítéséből az alábbi eredményre jutottunk:

Átlagos teljesítmény:	49,7%.
Minimum teljesítmény:	42,7%.
Optimum teljesítmény:	52,9%.

Vizsgálódásra elsősorban az alacsony minimum szintű matematikai problémák megoldása késztetett bennünket.

A matematikatanárok számára megjelölt politikai célok és a tantervi elvárások teljesítésében nem állunk magas szinten.

— A jelek arra mutatnak, hogy a Nevelés és oktatás tervében megfogalmazott feladatokat nem tudjuk megfelelő szinten elvégezni. Tanulóink a minimum szintű követelményekben nem érik el a 85—90%-ot. (Igaz, hogy a felmérésben részt vett iskolák tanárai először, vagy legfeljebb másodízben tanították az új 5. osztályos tantervet).
— A szaktanárok felkészítése tudatosan és tervszerűen történt és mégsem volt hatékony. A fokozatosan belépő kartársak közvetett módon kaptak információkat a tanfolyamokon megjelent munkaközösség-vezetőktől, szaktanároktól. A lépcsőzetes bevezetés az érdeklődő, lelkes és eredményesen dolgozó tanároknak kedvezett.
— A matematikatanárok körében megtörtént a szemléletváltozás, de a tananyag egészséges szelektálása, a hatékony és eredményes nevelés-oktatásra való törekvés a kollégák nagy többségénél még nem tapasztalható.

Az említett problémák, hiányosságok a gyengébb képességű és a hátrányos helyzetű tanulóknál csapódnak le. Az ő érdekükben munkálkodik csoportunk a differenciált foglalkoztatás lehetőségeivel. Számukra — és a tehetségesek részére is — szeretnénk utat nyitni az ismeretek megszerzésében, azok gyakorlásában. Az elmúlt tanévben továbbképzéseink is ezt az irányt követték. Tájékoztattuk az igazgató kartársakat is e korszerű módszer alkalmazásának célszerűségéről, eredményességéről.

Eddigi hagyományos oktatásunk arra épült, hogy az azonos korosztályba tartozó gyerekek képességei egyformák, fejlődésük üteme és szintje megegyezik és munkatempójuk sem különböző.

A születési adottságokból és a környezeti hatásokból adódóan a tanulók fejlődése nem azonos. A nevelés és oktatás hatékonysága és eredményessége érdekében fel kell figyelnünk az eltérő szellemi és fizikai adottságokra, fejlődésük különbözőségére, eddigi tudásuk szintjére. Be kell látnunk, hogy vannak gyorsabban gondolkodó tanulók, mások több manipulációt igényelnek. Befolyásolható tényező lehet az ingerszegény környezet, a nagyobb türelmet igénylő, tapintatosabb egyéni bánásmód. E szempontok szerinti felbontás is lehet egyfajta differenciálása a tanulóknak.

Folyamatos megfigyelések, vizsgálódások alapján is alakíthatunk ki csoportokat a matematika-tananyag feldolgozása céljából. Mérésünk objektívebb, ha egy-egy témán belül szintező, differenciáló vagy tájékozódó felmérés alapján differenciáljuk 3 csoportba a tanulókat.

A szintező feladatsorral meggyőződhetünk a tanuló matematikai tájékozottságáról, előismereteiről, a matematikai alapok szilárdságáról. Természetesen lehetőséget adunk a tanulóknak ahhoz, hogy magasabb szintű csoportba kerüljön más-más téma feldolgozása során.

A csoportok munkáltatásánál fontosnak tartjuk, hogy a tanulók megfelelő útmutatást kapjanak, még a gyengébbeknél is próbálkozzunk a tanulói önállóság fejlesztésével.

Két csoportos felosztással eddig is foglalkoztunk. Most egy kicsit tudatosabbá szeretnénk tenni a tanulók munkáltatását.

Az ismeretek megszerzésének folyamatában a jóképességű A csoport tankönyv, munkalap, vagy más segédanyag segítségével fedezi fel a tananyag lényegi részeit.

A gyenge képességű C csoport eszközökkel, applikációkkal dolgozik, ahol lényegesen nagyobb segítséget ad a szaktanár a tanulóknak, hogy elősegítse az önállóság kibontakoztatását és a sikerélményt.

A tanulók korábbi felosztását az is-

meretek begyakorlásánál hasznosítottuk és nem azok megszerzésében. A tanulók középrétege — amely a legnagyobb létszámot jelenti — felhígította a tehetségeseket és háttérbe szorította a gyengéket. Nem kaptak képességeiknek megfelelő tevékenységet, feladatot. A középső csoport a differenciált ismeretszerzésben az írásvetítő vezérlésével dolgozik.

A szaktanár vizsgálja meg, hogy mindhárom csoportbeli tanuló az ismeretszerzésben eljutott-e a megértésig, a lényegkiemelésig (összefüggésig, definícióig).

Az ismeretelsajátítást és a mélyítést fokozhatjuk az alkalmazás, a gyakorlás területén. Itt sem maradhat el az információlódás a végzett munkáról és az értékelés.

Az ismeretek további — órán kívüli — alkalmazását jelentik a differenciált házi feladatok. A csoportszintnek megfelelő példamegoldás további érdeklődésre inspirálhatja a tanulókat (megoldási tervek módosítása, diszkutálás stb.), szélesítheti matematikai látásmódjukat. A kartársaknak kétféle módszert javasolunk:

a) A mindenki számára kitűzött feladat megjelölésével célunk a minimum követelményszint elsajátíttatása. Ezt kövesse differenciáltan a gondolkodás fejlesztését célzó, jobb képességűeknek előírt házi feladat.

b) Megpróbálkozhatunk a csoportoknak megfelelő szintű feladatok differenciálásával is.

A matematikai ismeretek ellenőrzése rendszeres legyen, a szaktanár minden tanulói tevékenységről informálódjon (ismeretszerzés, gyakorlás, házi feladatok). A témakör vagy a rövidebb matematikai egység lezárása ellenőrző feladatsorral történjen, amit értékel és érdemjeggyel is ellát a szaktanár.

A tanórán kívüli differenciálás, ezen belül a hátrányos helyzetű tanulók segítése erkölcsi kötelességünk. Módszereinkben az önálló tevékenység fejlesztésére kell figyelnünk. Törekedjünk arra is, hogy a korrepetálás ne csak a házi feladatok megoldására szorítkozzon. Próbáljuk felfedni a hiányosságokat a tanulókban és ezeknek pótlására, az ismeretek megerősítésére és gyakoroltatására jelöljünk ki feladatokat.

A tehetséges tanulókat irányítsuk helyi-, illetve központi szakkörökbe, valamint a TIT szervezésű KMBK foglalkozásokra.

Három területről szeretnénk bemutatni szintező feladatsort, egy-egy óra differenciált feldolgozását és a nagyobb egységet záró ellenőrző feladatokat.

I. *Törtek összehasonlítása*

Szintező feladatsor (Előző óra végén oldják meg a tanulók!)

1. Jelöld meg a számegyenesen a következő törtek helyét! (Egység egy kis kocka oldalának hússzorosa.) Írd fel a törteket csökkenő sorrendben!

$$\frac{1}{5},\ \frac{1}{10},\ \frac{3}{4},\ \frac{9}{20},\ \frac{17}{20}.$$ 7 p

2. Írd növekvő sorba!

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{5},\ \frac{3}{4},\ -\frac{2}{2},\ \frac{5}{2},\ 0,\ -\frac{12}{3},\ \frac{21}{7}.$$ 5 p

3. Színesrúd segítségével döntsd el, melyik tört értéke $\frac{3}{4}$? (Egység a zöld rúd.)

$$\frac{7}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ 1-\frac{1}{4},\ \frac{9}{12},\ \frac{1}{2}+\frac{3}{12}.$$ 5 p

Összesen: 17 pont

A csoport: 15—17 pont,
B csoport: 9—14 pont,
C csoport: 0— 8 pont.

Differenciált foglalkozás

A csoport feladatai

1. *a)* Tk 45./**8.** *a)*.

b) Ezek közül hasonlítsd össze a $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{5}$ törteket!

c) Hasonlítsd össze a $\frac{2}{5}$ és $\frac{2}{3}$ törteket!

d) Hasonlítsd össze a $\frac{2}{3}$ és $\frac{4}{5}$ törteket!

2. Hasonlítsd össze, és írd csökkenő sorrendbe a következő törteket! (Segít a tk 33. oldala!)

$$\frac{5}{8},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{12}.$$

B csoport feladatai

Ábrázold számegyenesen a

$$\frac{3}{20},\ \frac{11}{20},\ \frac{10}{20},\ \frac{19}{20},\ \frac{7}{20}$$

törteket!

a) Írd fel ezeket növekvő sorrendben!

b) Írd fel növekvő sorrendben az $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{12}$ törteket!

c) Olvasd el! Tk 33. oldal I., II. bekezdés.

d) Hasonlítsd össze a $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$ törteket!

C csoport feladatai

1. Állítsd növekvő sorba a következő törteket a színesrúd segítségével! (Egység a zöld rúd.)

$$\frac{3}{12},\ \frac{10}{12},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{12}.$$

2. Írd csökkenő sorba a következő törteket a színesrúd segítségével!

$$\frac{2}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{6},\ \frac{2}{12}.$$

3. Melyik több:

$$\frac{2}{3} \text{ vagy } \frac{3}{4}?$$

Rajzold le! Az egység legyen egy kis kocka oldalának 12-szerese!

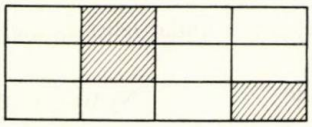
Közös feladat mindhárom csoportnak: Tk 48./**20.**

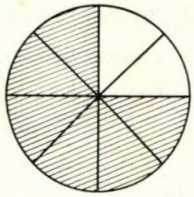
Házi feladat: A csoport: Tk 47./**16.**, **17.**; 49./**22.**

B—C csoport: Tk 47./**16.**, **17.**

Ellenőrző feladatsor: Törtfogalom és műveletek törtekkel.

1. Írd a vastagon meghúzott szakasz, a téglalap, illetve a kör bevonalkázott része alá, hogy mekkora része az egésznek! Amelyiket lehet, egyszerűsítsd!





Hasonlítsd össze a kapott törteket! 3 p

2. Helyezd el számegyenesen!

$$\frac{3}{10},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{11}{10},\ \frac{9}{20},\ 1,\ \frac{25}{100},\ \frac{3}{6},\ -\frac{50}{100},\ -\frac{4}{10}.$$ 4 p

3. Oldd meg a nyitott mondatokat, végezz ellenőrzést!

$$a)\ \frac{3}{4}+x<\frac{11}{6};\quad b)\ y-\frac{2}{3}=\frac{1}{2};\quad c)\ 13-x=-\frac{1}{5}.$$ 9 p

4. Keress szabályt és pótold a hiányzó számokat!

x	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	8	$\frac{4}{5}$	$\frac{17}{100}$	$2\frac{3}{4}$			
y	$\frac{10}{3}$	$2\frac{5}{10}$	40				$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{7}$	$3\frac{5}{10}$

7 p

5. Egy téglalap kerülete 8 m, hosszúsága $\frac{14}{5}$ m. Mekkora a szélessége? 5 p

6. $\frac{9}{\square}$ $\quad$ $\frac{7}{\square}$

$\parallel$ $\quad$ $\angle$

$\frac{3}{4}$

$\frac{\square}{4}\cdot 3$ $\quad$ $3:\square$

Írj a négyzetbe olyan számot, hogy a felírt egyenlőségek, egyenlőtlenségek igazak legyenek. Pótold a hiányzó jeleket! 7 p

Összesen: 35 pont

II. *Nyitott mondatok megoldása*

Tájékozódó felmérés

Gondoltam egy számot. Jelöld a kétszeresét, harmadrészét, 10-zel nagyobbat, hárommal kisebbet, háromszorosánál 1-gyel kisebbet, felénél 7-tel nagyobbat! 6 p

Melyik számra gondoltam, ha fele 16; ötszöröse 60; 10-zel nagyobb a 4; kétszeresénél 5-tel nagyobb a 19? 4 p

Összesen: 10 p

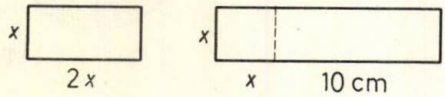
A csoport: 8—10 pont.
B csoport: 5— 7 pont.
C csoport: 0— 4 pont.

Differenciált foglalkozás

A csoport feladatai Nyitott mondat felírása, megoldása, ellenőrzése.

1. *a)* Tk 150./**23.** *b), c).*

b) $2(x+2x) = 40$; Nyitott mondat felírása, megoldása, ellenőrzése.



c) $2(x+x+10) = 40$.

2. Tk 151./**27.** Töltsd ki a táblázatot! Jelöld az életkorokat! Számolj! Tégy fel kérdéseket a feladattal kapcsolatban!

Laci						
Márti	x	6	7	8	...	16
Mama						
Papa						

3. Tk 129./**64.** Feladatterv készítése, többféle megoldás keresése.

$$11(110-85),$$
$$110 \cdot 11 - 85 \cdot 11,$$
$$85 \cdot 11 < 110 \cdot 11.$$

Mennyivel nagyobb az utolsó egyenlőtlenség jobb oldala a bal oldalánál?

4. Tk 129./**65.** Nyitott mondat felírása többféle módon.

$$(250+120) \cdot 14 \leqq 6000,$$
$$250 \cdot 14 + 120 \cdot 14 \leqq 6000.$$

B csoport feladatai

1. Tk 150./**23.** *b).* Nyitott mondat: $2(x+2x)=42$.
Ellenőrzés:

2. Tk 150./**26.** Feladatterv, nyitott mondat: $x+x+20+2x+40=190$.
Ellenőrzés:

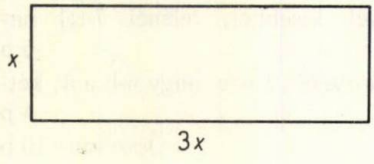
3. Tk 129./**63.**

1m	2m	3m	...	x m
228 Ft				

4. Tk 123./**31.** *b), c), d).* Az ismeretlen kiszámítása, ábrázolás számegyenesen.

C csoport feladatai

1. Tk 150./**23.** *a).*



Megoldás próbálgatással.

x	1	2	3	4	5	6
$3x$						
k						

2. Tk 150./**28.**

Anya	30	31	32	...	60
Péter	0	1	2		30

a)—d) feladatok megbeszélése.

3., 4. Azonos a B csoport feladataival.

Gyakorló feladatok

	A	B	C
1.	Tk 131./**79.**	Tk 131./**81.** *c).*	Tk 131./**75.**
2.	Ml 58./**1—5.**	Ml 58./**2., 3.**	Ml 58./**3., 4.**
3.	Ml 57./**2.**, 58./**6.** *a), b).*	Ml 57./**2.**	Tk 128./**58.**

Házi feladatok

Ml 51., 57./**1.** *a)—e).* Ml 50./**2.**, 57./**1.** *a), b).* Tk 123./**31.** *c), d).* Ml 50./**1.**

Ellenőrző feladatsor: Nyitott mondatok.

1. Tk. 151./**37.** feladat felírása nyitott mondattal, megoldása, ellenőrzése. 4 p

2. Írd fel a nyitott mondatok megoldásait! Ábrázold számegyenesen!

a) $-1+\triangle < 10$; *b)* $-1+\square = 10$; *c)* $-1+* > 10$.

egész számok term. számok rac. számok 6 p

3. Keresd az egyenletek megoldásait!

a) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\square = 1$; 2 p

b) $4{,}2+\triangle = 16{,}1$; 1 p

c) $\square : 2{,}5 = 13$; 1 p

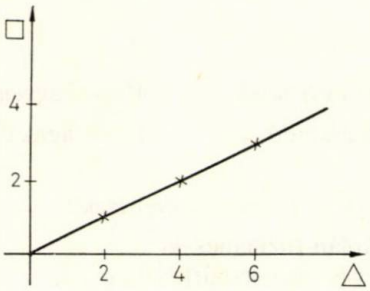
d) $7+3\cdot * = 22$. 1 p

4. Imre édesanyja 20 éves volt, amikor Imre született. Hány év múlva lesz az édesanya 2-szer annyi idős, mint Imre? Hány év múlva lesz Imre harmadannyi, mint édesanyja? Hány év múlva lesz az anyja 22 évvel idősebb, mint Imre? Készíts táblázatot!

Anya	20	21	22	
Imre	0	1		

3 p

5. Készíts a grafikon alapján táblázatot, majd írj hozzá nyitott mondatot!



2 p

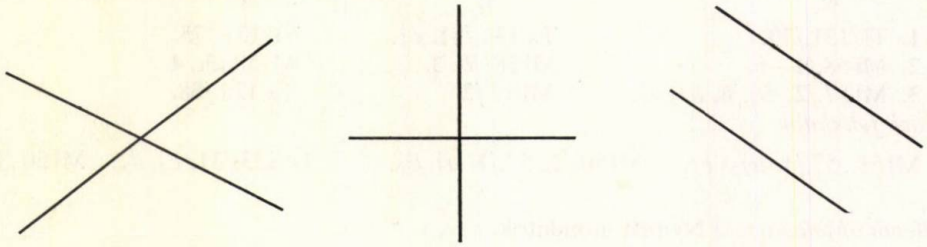
Összesen: 20 pont

III. Egyenesek kölcsönös helyzete, ponthalmazok

Tájékozódó felmérés

1. Rajzolj egy e egyenest! 1 p
Rajzolj egy AB szakaszt, mérd meg a hosszát! 2 p
Rajzolj c félegyenest! 1 p

2. Milyen a két egyenes helyzete?



3 p

3. Jelölj ki a síkon 3 pontot!
Az A és B pontokon keresztül húzz egy egyenest!
Rajzolj a C ponton átmenő olyan egyenest is, amely metszi az előzőt!
A metszéspontot jelöld D-vel!
Mérd meg a CD szakasz hosszát! 5 p

A csoport: 10—12 pont. Összesen: 12 pont
B csoport: 6— 9 pont.
C csoport: 0— 5 pont.

Differenciált foglalkozás: Egyenesek kölcsönös helyzete.
Fogalmak: párhuzamos, metsző, kitérő egyenesek.

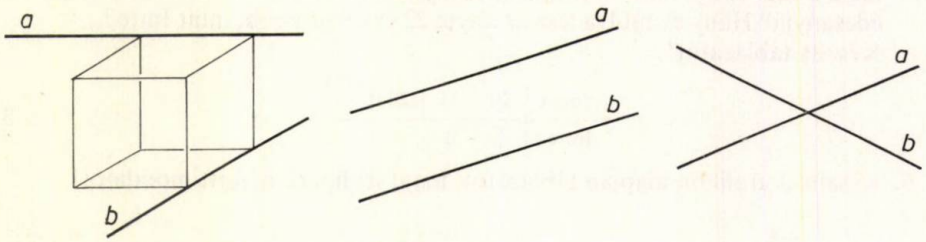
A B C

Állapítsátok meg, milyen messze van a két egyenes egymástól!

Babilon modellen két kitérő egyenes.

Szögestáblán kitűzve a és b párhuzamos egyenesek.

Szögestáblán kitűzve a és b metsző egyenesek.



A közös megbeszélés sorrendje: C, B, A csoport.

Kitérő egyenesek

Távolságuk a mindkettőre merőleges szakasz hossza.

Párhuzamos egyenesek

Távolságuk állandó, jele $a \parallel b$.

Metsző egyenesek

Távolságuk 0.

Problémafelvetés: Hogyan helyezkednek el a metsző egyenesek?

Hajtogatással állíthatnak elő és szögestáblán tűzhetnek ki merőleges egyenespárt, jele $a \perp b$.

Tanári bemutatás után merőleges és párhuzamos egyenesek rajzolásának gyakorlása következik.

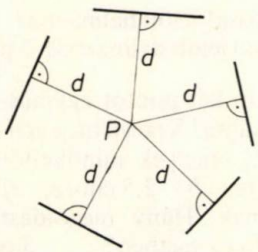
Párhuzamos és merőleges egyenesek rajzolása, gyakorlása, alkalmazása.

A	B	C
Tk 236./**1.**, **2.**, **3.** feladata után 237./**11.** (kevés segítséggel).	Tk 236./**1.**, **2.**, **3.** önálló végrehajtás.	Tk 236./**1.** önállóan, **2.** segítséggel.

A **3.** feladat közös megbeszélésével ellenőrizzék az A és B csoport önálló munkáját, a C csoportnak pedig ezáltal nyújtsanak ismeretanyagot!

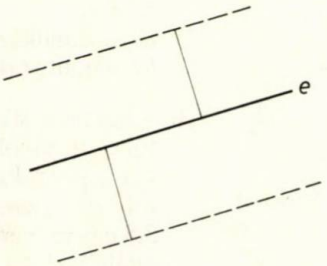
A következő feladatoknak csak a megoldási tervét készítsék el, majd közösen szerkesszenek!

Tk 236./**6.**



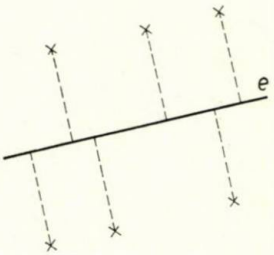
Szerkesztési menet elmondásával.

Tk 236./**7.**



A lehetőségek számbavételével.

Tk 236./**5.**



Sok segítséggel.

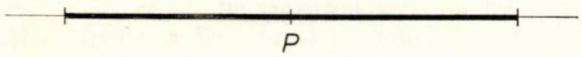
A közös megbeszélés sorrendje: C, A, B. Vázlat a fóliával kivetíthető. A szerkesztést mindhárom csoport végzi tanári bemutatás mellett.

Adott tulajdonságú pontok keresése. Fogalmak: kisebb, nagyobb, legalább, legfeljebb, nem kisebb, nem nagyobb, alaphalmaz.

Figyelemfelkeltés: Most csak egyenesen vizsgálódunk.

A	B	C
Tk 237./**15.***c)*.	Tk 237./**15.***b)*.	Tk 237./**15.***a)*.

Fóliára rögzítjük a helyes megoldásokat, kivetítve ellenőrizzük C, B, A sorrendben. Mindegyik csoport megrajzolja a másik feladatát is, tisztázva közben a fogalmakat és a jelölésmódokat. A 237./**15.***a)* feladat megoldását ezután vetítjük ki, arról kell leolvasni a ponthalmaz tulajdonságát.



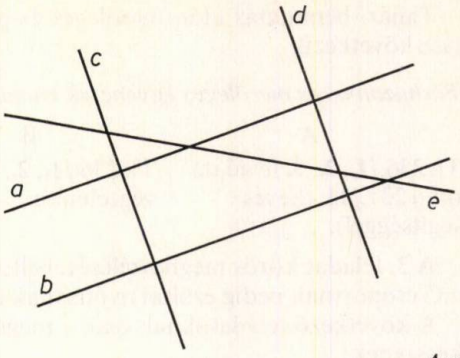
P ponttól legfeljebb 4 cm-re, vagy *P*-től 4 cm-nél nem nagyobb távolságra levő pontok halmaza.

Az előző órán tanultak gyakorlására és alkalmazására ajánljuk még a következő feladatokat.

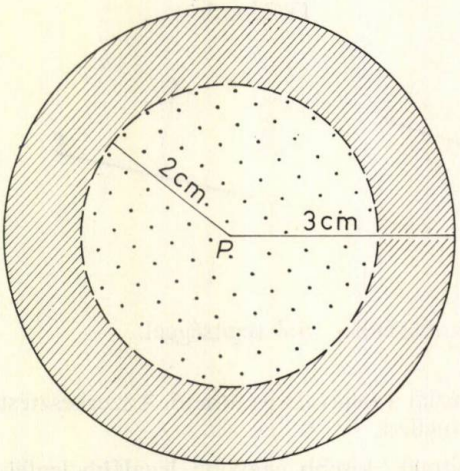
Tk 245./**51.** a merőlegesek megrajzolása.	Tk. 245./**50.** párhuzamos reláció felismerése rajzról.	Tk 244./**49.** párhuzamosok felismerése.

Ellenőrző feladatsor

1. A tanult jelölésmódokkal írd fel, hogy milyen kapcsolat van az egyenesek között!



4 p



2. Milyen tulajdonságú pontok tartoznak
a) a vonalkázással jelölt halmazba;
b) a pontozással jelölt halmazba? 5 p

3. Végy fel a síkon két pontot egymástól 5 cm távolságra! Keresd meg azokat a pontokat, amelyek mindkettőtől *a)* 2 cm-re, *b)* 2,5 cm-re, *c)* 3,5 cm-re vannak. Hány megoldást találtál *a)*, *b)* és *c)* esetben? 3 p

4. Végy fel a síkon egy 5 cm hosszúságú *AB* szakaszt! Szerkeszd meg az $\frac{1}{2}$-részét, húzd ki színessel! 2 p

5. Végy fel egy egyenest, valamint egy *P* pontot! Keresd meg azokat a pontokat, amelyek mindkettőtől 3 cm-re vannak! Mi a feltétele annak, hogy legyen ilyen pont? Mikor nincs megoldás? 6 p

6. Szerkeszd meg azt a négyzetet, amelynek átlója 5 cm! 6 p

Összesen: 26 pont

A differenciált tanórai foglalkoztatás tapasztalatait a tanulók és a szaktanárok szemszögéből vizsgáltuk.

A tanulók oldaláról:

— Minden tanulót olyan feladat elé állítunk, amely számára erőfeszítést jelent, de képes megoldani, így sikerélményhez jut.
— Témákra bontva is láthatjuk a tanulóknál a differenciálódást (geometria, algebra, függvények stb.), felfedezhetők a hiányosságok.
— Mindig olyan mértékben és szinten segíthetünk az egyes csoportoknak, amire éppen szükségük van. Lehetőség nyílik az egyének útbaigazítására, elindulásának segítésére.
— A jól megválasztott feladat és a megfelelő időben adott tanári információ lehetővé teszi, hogy a tanulók önállóan ismerjék fel a problémát és ellenőrizzék munkájuk helyességét. Ezáltal fejleszthetjük gondolkodásukat, következtető és kombinatív képességüket, valamint önkritikájukat.

— Fokozatos terheléssel, intenzívebb munkáltatással javul a tanulók munkaerkölcse.
— Bátrabb a gyengébb képességűek megnyilvánulása, igénylik a differenciált foglalkozásokat. A követelmények teljesítésében eredményeik javulnak.
— Jó kapcsolat alakul ki a tanár és a tanuló között. a tanítványok őszintébbek, lelkesebben végzik munkájukat.

A szaktanárok oldaláról:

— A differenciált munkáltatás módszere nagyobb felkészültséget és több emberséget kíván a szaktanároktól.
— Alaposabb a tantervi anyag- és követelményismeret, átgondoltabb a kollégák tervező munkája.
— Nagyobb lehetőség nyílik a személyiségformálásra, a közösségi nevelésre.
— A felkészülési idő kezdetben lényegesen több, mint az átlagos, de a felzárkóztatás és az eredményesség érdekében a matematikát kedvelő kartársak ezt vállalják.
— A differenciált tantervi anyag- és követelményrendszer csak differenciált foglalkoztatással teljesíthető.
— Nem minden matematikaórán és nem minden témában alkalmazható a differenciált foglalkoztatás.
— A tanítási tapasztalatok azt igazolják, hogy a módszer eredményes, alkalmazásával szilárdabbak a tanulók matematikai ismeretei.
— Az év végi pótló foglalkoztatás helyett a tanéves differenciált munkáltatás időt ad a felzárkóztatásra, csökkenti a bukások számát.

A Győr-Sopron megyei matematikai alkotó munkaközösség javaslatot szeretne adni a szaktanároknak a differenciált munka megszervezéséhez. Ösztönözni kívánjuk a kollégákat a jobb és eredményesebb tervező munkára és annak sikeres megvalósítására.

Az alkotó munkaközösség tagjainak ezúton is megköszönöm lelkes, hozzáértő, gazdag tapasztalatból merített elgondolásaikat, és mindazt, amit az 5. osztályos matematika-tanterv differenciált feldolgozásának érdekében tettek.

DR. KÓSA ANDRÁS
tanszékvezető egyetemi docens
ELTE

Az analízis alapvető fogalmainak konstruktív bevezetéséről

Ismeretes, hogy az analízis elemeinek a tanításakor a függvény pontbeli deriválhatóságának a fogalmát visszavezethetjük akár a határérték, akár a pontbeli folytonosság fogalmára. Többnyire az első lehetőséggel élünk, habár tapasztaljuk, hogy a határérték nehéz, elvont és bonyolult fogalma igen nagy nehézséget jelent minden kezdő számára. Talán azért ragaszkodunk mégis ehhez a megoldási lehetőséghez, mivel a határérték fogalmának és a rá vonatkozó egyszerű eredményeknek a birtokában a differenciálszámítás kezdeti fogalmai és eredményei szinte automatikusan taníthatók. Jelen cikk ahhoz kíván adalékul szolgálni, hogyan oldható meg a kitűzött feladat akkor, ha a második utat választjuk. Nemcsak meggyőződésünk, hanem

tapasztalatunk is, hogy így könnyebben, sokkal konstruktívabb felépítésben tudjuk a kezdő diákot elvezetni a differenciálhatóság fogalmához.

Az alábbiakban, ha valamely függvényt pl. az f betűvel jelölünk, akkor D_f jelöli e függvény értelmezési tartományát. Cikkünkben függvényen mindig valós-valós függvényt értünk, vagyis olyant, amelynek mind az értelmezési tartománya, mind az értékkészlete része a valós számok halmazának. A természetes, illetve a valós számok halmazát az **N**, illetve az **R** szimbólummal jelöljük.

1. Folytonosság és határérték

Először hasonlítsuk össze a pontbeli folytonosság és függvény végesben vett határértékének a fogalmát. Ezek a fogalmak — párhuzamos tálalásban — a következők:

1. **definíció:** Azt mondjuk, hogy egy f

függvény	függvénynek

értelmezési tartománya valamely

(1) a pontjában	a torlódási pontjában
(2) folytonos,	határértéke az A valós szám,

ha minden egyes pozitív ε számhoz létezik olyan δ pozitív szám, hogy bármely

(3) $x \in D_f \cap]a-\delta,\ a+\delta[$	$x \in (D_f \cap]a-\delta,\ a+\delta[) \setminus \{a\}$

esetén teljesül az

$\lvert f(x)-f(a)\rvert < \varepsilon$	$\lvert f(x)-A\rvert < \varepsilon$

egyenlőtlenség.

Mind a folytonosság, mind a határérték fogalmában két kvantor szerepel: ebben a vonatkozásban mind a két értelmezésnél a diákok ugyanazzal a nehézséggel találják szemben magukat. Ettől eltekintve a folytonosság definíciója — minden szempontból — egyszerűbb a határérték értelmezésénél:

a) A függvény folytonosságát értelmezési tartományának a pontjaiban, határértéke létezését pedig az értelmezési tartománya torlódási pontjaiban vetjük fel [lásd (1)-et]. A folytonosságnál tehát nem szerepel semmilyen, a függvény megadásakor már számba nem vett objektum, míg a határérték esetében szükségünk van a számhalmaz torlódási pontjának a fogalmára, vagy olyan más, szintén pótlólagos feltételezéssel kell élnünk, amely biztosítja, hogy a torlódási pontja legyen D_f-nek.

b) A határérték értelmezésénél szerepel egy minden előzmény nélkül „odavetett" A valós szám is [lásd (2)-t]. Elvileg valamennyi A valós számmal kapcsolatban felvethető, hogy határértéke-e az a pontban f-nek. Aztán, ha valamelyik A szám az a pontbeli határértéke f-nek, akkor azt is ki kell mutatni, hogy ez A-tól különböző valós számra nem állhat fenn. Mindezek a felsorolt problémák a folytonosság értelmezését nem terhelik.

c) A (3) alatti halmaz szerkezete egyszerűbb a folytonosság esetében.

A fenti — bizonyos mértékig formálisnak is tekinthető — különbségeken túl még az a tény is a folytonosság elsődleges vizsgálatára késztethet bennünket, hogy nagyon egyszerű és természetes példákat tudunk adni olyan függvényekre, amelyek értelmezési tartományuk bizonyos pontjaiban folytonosak, más pontjaiban pedig nem. Ezek a példák közismertek (törtrészfüggvény, lépcsősfüggvények stb.). Másrészt: a függvényhatárérték példákkal való előkészítése megközelítőleg sincs ilyen jól megoldva.

A következő pontot arra szánjuk, hogy a kezdő számára nem triviális feladatokból kiindulva jussunk el a folytonosság fogalmához. Látni fogjuk, ez úgy is elvégezhető, hogy közben természetes módon eljutunk a függvény pontbeli deriválhatóságához is.

2. Polinomfüggvények szélsőérték-vizsgálata

Legyen $n \in \mathbf{N}$, $c_0, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$, $c_0 \neq 0$, és vizsgáljuk szélsőérték szerint az

$$f: x \mapsto c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n \quad \left(= \sum_{i=0}^{n} c_i x^{n-i};\ 0^0 := 1 \right)$$

n-edfokú polinomfüggvényt (polinomot). A kétféle szélsőérték közül elegendő az egyikre, pl. a minimumra szorítkozni. Az f függvénynek valamely $a \in \mathbf{R}$ pontban pontosan akkor van lokális minimuma, ha létezik olyan δ pozitív szám, hogy

$$f(x) - f(a) \geqq 0 \quad (x \in]a-\delta;\ a+\delta[). \tag{4}$$

Legyen tehát $a \in \mathbf{R}$ tetszés szerint rögzített, és állítsuk elő a (4) különbséget. Ekkor azt kapjuk, hogy bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^{n-i} - \sum_{i=0}^{n} c_i a^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} c_i (x^{n-i} - a^{n-i}) = F_a(x)\,(x-a),$$

ahol

$$F_a: x \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} x^{i-1-j} a^j \right).$$

Az F_a függvény tehát pontosan $(n-1)$-edfokú polinomfüggvény.

A fentebb kapott

$$f(x) - f(a) = F_a(x)\,(x-a) \quad (x \in \mathbf{R}) \tag{5}$$

egyenlőség jobb oldalán szereplő $x \mapsto x-a$ függvény *jelváltó* az a pontban. Ez a nyilvánvaló észrevétel figyelmünket természetes módon irányítja arra a kérdésre, hogy F_a az a helyen nulla-e vagy sem, és ha

$$F_a(a) \neq 0. \tag{6}$$

akkor F_a *jeltartó*-e a-ban. Ugyanis, ha (6) fennáll és F_a jeltartó a-ban, akkor az

$$x \mapsto F_a(x)\,(x-a)$$

függvény jelváltó az a pontban, amiből következik, hogy nincs olyan δ pozitív szám, amely mellett teljesülne a (4) egyenlőtlenség, s ez azt jelenti, hogy a nem lokális minimumhelye az f függvénynek.

Felvetődik tehát az a kérdés, hogy tetszés szerinti, az azonosan 0 függvénytől különböző G polinomfüggvény jeltartó-e, azaz minden olyan $\alpha \in \mathbf{R}$ helyhez, ahol $G(\alpha) \neq 0$, található-e olyan Δ pozitív szám, hogy fennálljon a

$$G(\xi)G(\alpha) > 0 \quad (\xi \in]\alpha-\Delta;\ \alpha+\Delta[)$$

egyenlőtlenség? A válasz *pozitív*; erre a problémakörre a következő pontban visszatérünk. F_a jeltartó volta viszont azt jelenti, hogy ha (6) fennáll, akkor f a-ban nem vehet fel lokális szélsőértéket. Eljutottunk tehát (elfogadva F_a jeltartó voltát) a lokális szélsőérték következő szükséges feltételéhez: *ha f az a helyen lokális minimumot vesz fel, akkor*

$$F_a(a) = 0. \tag{7}$$

F_a értelmezéséből következik, hogy

$$F_a(a) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\, c_i a^{n-i-1} = nc_0 a^{n-1} + (n-1)c_1 a^{n-2} + \ldots + c_{n-1}.$$

Célszerű bevezetni azt a polinomot, amelynek az a helyen vett helyettesítési értéke éppen $F_a(a)$-val egyenlő ($a \in \mathbf{R}$). Így jutunk el f derivált (f-ből származtatott) függvényének a fogalmához:

2. **definíció:** Az

$$f' : x \mapsto nc_0 x^{n-1} + (n-1)c_1 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}$$

polinomot f derivált függvényének nevezzük.

A derivált függvény fogalmának a segítségével a fenti szükséges feltételt így fogalmazhatjuk meg:

Tétel: Ha az f függvény az a helyen lokális szélsőértéket vesz fel, akkor

(8) $$f'(a) = 0.$$

Megjegyzések:

1. A fenti témakör tanításakor célszerű a tárgyalást konkrét esetekkel kezdeni: adott együtthatójú másod-, majd harmadfokú polinomokkal stb. A másodfokú polinomok esetében nyilván az abszolút szélsőérték problémáját vetjük fel, harmadfokú polinomok esetében pedig a megfelelő (5) alak vizsgálata természetes módon vezethet el bennünket a lokális szélsőérték fogalmához. Első- és másodfokú polinomok jeltartása közvetlenül is könnyen belátható. Felhívjuk a figyelmet arra is, hogy az említett konkrét esetekben az (5) egyenlőség vizsgálatával egyszerűen eldönthető, hogy a (8) feltételt teljesítő a szám valóban szélsőértéket szolgáltat-e vagy sem.

2. Az (5) egyenlőség alapvető jelentőségű az f a-beli viselkedését illetően. Ha $f'(a) = F_a(a) \neq 0$, akkor (5)-ből természetes módon juthatunk el a lokális növekedés, illetve fogyás fogalmához és az ezekre vonatkozó ún. elsőrendű szükséges és elégséges feltételekhez.

3. Függvény pontbeli folytonossága

Az előző pontbeli fejtegetésben alapvető kérdésként vetődött fel az a probléma, hogy tetszés szerinti, az azonosan 0 függvénytől különböző polinomfüggvény jeltartó-e.

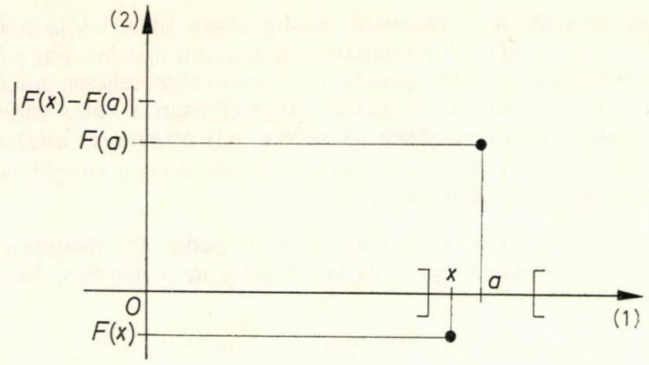
Egy polinom jeltartó voltának a vizsgálatára többféle mód is kínálkozik. Célszerű, ha e lehetőségek közül a következő természetes meggondolásra irányítjuk a figyelmet.

Legyen F tetszés szerinti (az azonosan nulla függvénytől különböző) polinom. F jeltartó voltát olyan pontokban kell vizsgálnunk, ahol a függvényérték nem 0. Legyen tehát $a \in \mathbf{R}$ olyan, hogy $F(a) \neq 0$. Az $F(a)$ számot azonban csak konkrét polinom és konkrét a esetében ismerjük; „általános" vizsgálatoknál tehát meg kell elégednünk $|F(a)|$-val kapcsolatban azzal az egyetlen információval, hogy

$$|F(a)| \text{ pozitív szám;}$$

„ezenkívül" $|F(a)|$ tetszés szerinti lehet. Mivel lehetne biztosítani, hogy F a-ban jeltartó legyen? Közelítsük meg a problémát az ellenkező oldalról: mit jelentene az, ha F nem volna jeltartó a-ban? Azt, hogy a bármely környezetében lenne olyan x hely, hogy az $|F(x) - F(a)|$ eltérés nagyobb volna $|F(a)|$-nál (l. a 47. oldalon levő ábrát!).

Ez viszont nyilvánvalóan nem következhet be, ha teljesül a következő feltétel:



Minden egyes ε pozitív számhoz (így $|F(a)|$-hoz is!) létezik olyan δ pozitív szám, hogy

$$|F(x)-F(a)| < \varepsilon \quad (x \in]a-\delta;\ a+\delta[).$$

E feltétel megadásával eljutottunk az F függvény a-beli folytonosságának a fogalmához. Ez után már természetes módon értelmezhetjük tetszés szerinti függvény pontbeli folytonosságának a fogalmát (lásd az 1. definíció). Ehhez csak azt kell figyelembe vennünk, hogy valós-valós függvények értelmezési tartománya általában nem az egész $\mathbf{R}$ halmaz.

Megjegyzések:

1. A pontbeli folytonosság fogalmához úgy jutottunk el, hogy — heurisztikus meggondolással — olyan feltételt kerestünk, amelynek teljesüléséből következik a függvény jeltartó volta. Valóban, legyen f valós-valós függvény, a belső pontja D_f-nek, $f(a) \neq 0$, és tegyük fel, hogy f folytonos a-ban. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $f(a) > 0$; a másik hasonlóképpen tárgyalható. Az f folytonos a-ban, ezért az $\varepsilon := f(a)$ számhoz létezik olyan δ pozitív szám, hogy egyrészt $]a-\delta;\ a+\delta[\subset D_f$, másrészt

$$|f(x)-f(a)| < f(a) \quad (x \in]a-\delta;\ a+\delta[).$$

A fenti egyenlőtlenségből következik, hogy

$$-f(a) < f(x)-f(a) \quad (x \in]a-\delta;\ a+\delta[),$$

s innen adódik, hogy

$$f(x) > 0 \quad (x \in]a-\delta;\ a+\delta[),$$

vagyis f jeltartó a-ban.

2. Könnyű kimutatni, hogy függvények valós számmal való szorzása, továbbá függvények összeadása és szorzása nem rontja el a folytonosságot. Ebből és az $x \mapsto x$, $x \mapsto 1$ függvények bármely $a \in \mathbf{R}$ pontbeli folytonosságából következik, hogy tetszés szerinti polinom folytonos minden egyes $a \in \mathbf{R}$ pontban. Ez az állítás különben más, közvetlenebb úton is viszonylag könnyen igazolható.

4. *Néhány kiegészítés*

A) A 2. pontban kimutattuk, hogy bármely f polinomfüggvény és bármely $a \in \mathbf{R}$ pont esetében létezik olyan F_a polinomfüggvény, hogy

$$f(x)-f(a) = F_a(x) \cdot (x-a) \quad (x \in \mathbf{R}). \tag{9}$$

A 2. pont tétele igazolásához F_a polinom voltából csak annyit használtunk fel, hogy az az a helyen folytonos (sőt még ennyit sem, hanem csak azt, hogy ha $F_a(a) \neq 0$,

akkor F_a a-ban jeltartó; a folytonosság pedig maga után vonja a jeltartóságot). Természetes tehát, hogy célszerű általában megvizsgálni mindazokat a függvényeket, amelyek hasonló tulajdonságúak: ezekre a függvényekre teljesen analóg következtetések vonhatók le. Így jutunk el szinte automatikusan a valós-valós függvények deriválhatóságának az értelmezéséhez. A tervbe vett értelmezés általános jellegénél fogva természetesen nem élünk azzal a megszorítással, hogy a vizsgált függvény értelmezési tartománya éppen az **R** halmaz.

3. **definíció:** Legyen f valós-valós függvény, a pedig D_f torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy f *deriválható* (vagy differenciálható) *az a pontban*, ha létezik olyan, az

(10) a pontban folytonos $F_a\colon D_f \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre

$$f(x)-f(a) = F_a(x)\cdot(x-a) \quad (x\in D_f). \tag{11}$$

Könnyű kimutatni, hogy (11) és (12) teljesülése esetén F_a egyértelműen meghatározott függvény; ekkor az $F_a(a)$ valós számot f *a-beli deriváltjának* (vagy differenciálhányadosának) nevezzük.

A (9) egyenlőségből következik, hogy F_a a D_f halmazra vonatkozó kiterjesztése az

$$x\in D_f\setminus\{a\}, \quad x\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{12}$$

függvénynek, mégpedig olyan kiterjesztése, amely az a pontban folytonos. A (12) függvényt f *a-hoz tartozó különbségihányados-függvényének nevezzük*. Ennek tehát az F_a függvény *a-beli folytonos kiterjesztése*. A pontbeli folytonos kiterjeszthetőség és a határérték létezésének a problémája — ahogy ezt a következő megjegyzésünkben látni fogjuk — lényegében egy és ugyanaz.

Az is könnyen belátható, hogy a pontbeli deriválhatóság fenti definíciója ekvivalens annak valamennyi „forgalomban levő" értelmezésével.

A (9) egyenlőséggel kapcsolatban kiemeljük annak igen könnyen kezelhető voltát. Ez a „nevező nélküli" egyenlőség igen előnyös a pontbeli deriválhatósággal kapcsolatos valamennyi tétel igazolása során.

Könnyen eljuthatunk függvény derivált függvényének a fogalmához is. Legyen f valós-valós függvény, E_f pedig D_f-nek az a része, amelynek pontjaiban f deriválható. Feltéve, hogy E_f nem üres, f-nek f'-vel jelölt *derivált függvényét* a következőképpen értelmezzük:

$$f'\colon E_f \to \mathbf{R}, \quad x\mapsto f\ x\text{-beli deriváltja}.$$

A 3. definíció közvetlenül átvihető ún. vektor-vektor függvényekre is, vagyis olyan f függvényekre, amelyekre (valamilyen $m, n\in\mathbf{N}$ mellett) áll, hogy $D_f\subset\mathbf{R}^m$, $R_f\subset\mathbf{R}^n$.

B) Az *A)*-ban bevezetett különbségihányados-függvény és az F_a közötti kapcsolat — szinte automatikusan — elvezethet bennünket függvény pontbeli határértékének a fogalmához.

4. **definíció:** Legyen f valós-valós függvény, a a D_f torlódási pontja, A pedig valós szám. Azt mondjuk, hogy *A az f függvény a-beli határértéke*, ha a $D_f\cup\{a\}$ halmazon az

$$x\mapsto\begin{cases} f(x), & \text{ha } x\in D_f\setminus\{a\},\\ A, & \text{ha } x=a\end{cases}$$

hozzárendeléssel értelmezett függvény folytonos az a-helyen.

Könnyen belátható, hogy a határérték egyértelmű, vagyis ha az A szám a-beli határértéke f-nek, akkor ez nem teljesülhet A-tól különböző más valós számokra.

Ha a 4. definíció tartalmát — a 3. definíció felhasználásával — részletesen kiírjuk, akkor „visszakapjuk" a határérték 1. definícióbeli értelmezését.

A határérték fogalmának a felhasználásával [megtartva az A)-ban használt jelöléseket] f pontosan akkor deriválható, ha f a-hoz tartozó különbségihányados-függvényének az a pontban létezik a határértéke. Ebben az esetben ez a határérték a függvény a-beli deriváltja.

C) A 2. pontban követett gondolatmenettel tehát természetes módon vezethetjük el a diákot az analízis olyan alapvető fogalmaihoz, mint pl.

a) adott ponthoz tartozó megváltozás-függvény,
b) lokális szélsőérték,
c) lokális növekedés,
d) jeltartás,
e) jelváltás,
f) pontbeli folytonosság,
g) pontbeli deriválhatóság,
h) adott ponthoz tartozó különbségihányados-függvény,
i) pontbeli kiterjesztés,
j) pontbeli határérték,
k) függvény derivált függvénye.

LUKÁCS OTTÓ
főiskolai docens
Budapest

Keresd a hibát!

Döntse el az olvasó, mi a hiba az alábbi feladatok megoldásában! Utána nézze meg a megoldást az 52. oldalon!

I.

1. Egy megoldás, amely nem megoldás

Az **a** vektor koordinátái (5; −2; 3), a **b** vektoré (−1; 2; z). Mennyi a **b** vektor harmadik koordinátája, z, ha az **a** és **b** 60°-os szöget zár be egymással?

Antal megoldása: A két vektor skaláris szorzata

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi,$$

ahol φ az **a** és **b** vektorok hajlásszöge. A skaláris szorzat a megfelelő koordináták szorzatának összege, az abszolút érték a koordináták négyzetösszegéből vont négyzetgyök. Így a koordináták segítségével

$$5(-1)-2\cdot 2+3z = \sqrt{5^2+(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+z^2}\cdot\cos 60°;$$

mivel $\cos 60° = \frac{1}{2}$, ezért az egyenlet mindkét oldalát 2-vel szorozva:

$$-18+6z = \sqrt{38}\sqrt{5+z^2},$$

ennek mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$324-216z+36z^2 = 38(5+z^2),$$

ahonnan

$$z^2+108z-67 = 0.$$

ennek gyökei:

$$z = \frac{-108 \pm \sqrt{11\,664 + 268}}{2} \approx \frac{-108 \pm 109{,}2337}{2} = \begin{cases} 0{,}6168; \\ -108{,}6168. \end{cases}$$

Béla véleménye a fenti megoldásról: „Az így kapott **b** vektorok egyike sem zár be 60°-os szöget **a**-val!" *Hol a hiba?*

2. 40 320 egyenlő $40\,320^2$-nel?

A $8 \cdot 8$ négyzetet tartalmazó sakktáblán 8 sakkfigurát kell felállítanunk úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban egy és csak egy bábu helyezkedjék el. Hányféleképpen tehető ez meg?

Antal megoldása: „Az első sorba 8-féleképpen tehető fel egy sakkfigura, ha ezt feltettük, a második sorba már csak 7-féleképpen. Az első sorban egy helyre feltett bábuhoz 7-féle lehetőség tartozik a második sorban, 8 lehetőség mindegyikéhez 7 párosul, az első és második sorban az összes lehetőség száma az egyes sorokban való elhelyezési lehetőségek szorzata, $8 \cdot 7$. Ugyanígy az első két sakkfigura elhelyezése után a harmadik sorba már csak 6-féleképpen rakhatok le, ezután eggyel-eggyel további sorba mindig eggyel-eggyel kevesebb féleképpen. Az egyes sorokban való elhelyezési lehetőségek száma összeszorzódik, ezért a kívánt elhelyezések száma

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40\,320."$$

Béla megoldása: „Az első bábut a 64 négyzet bármelyikén elhelyezhetem, az elhelyezett bábu sorába és oszlopába nem tehetek új figurát. A második sakkfigura elhelyezésére tehát $64-8-7=49$ lehetőségem van. Ha ezt is elhelyeztem, a harmadikra $49-7-6=36$ lehetőségem van. Ezután a negyedikre $36-6-5=25$, az ötödikre $25-5-4=16$, a hatodikra $16-4-3=9$, a hetedikre $9-3-2=4$, a nyolcadikra $4-2-1=1$ lehetőséget találhatok. Az így kapott lehetőségek számai összeszorzódnak, tehát az összes eset száma

$$8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = (8!)^2."$$ *Hol a hiba?*

3. Bombabiztos repülőút

Antal panaszkodik Bélának, hogy nagyon fél repülővel utazni; attól tart, hogy a gépen bombát helyeztek el. „Ennek nagyon kicsi a valószínűsége, csupán 0,0001" — mondja Béla.

„Ez még túl sok nekem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyszerre két személy visz egy-egy bombát a gépen?"

„Összebeszélnek előtte vagy egymástól függetlenül viszik a bombákat?"

„Egymástól függetlenül viszik."

„Független eseményeknél az együttes bekövetkezés valószínűsége a két esemény valószínűségének szorzata,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

ezért annak a valószínűsége, hogy két személy egymástól függetlenül bombát rejt el a repülőn, nagyon-nagyon kicsi, $0{,}0001 \cdot 0{,}0001 = 10^{-8}$."

Antal szeme felragyog: „Akkor már merek repülőn utazni. Ugyanis magammal viszek egy bombát. Nagyon kicsi (10^{-8}) az esély arra, hogy még egy bomba legyen a gépen." *Hol a hiba?*

4. Teljesen begolyóztunk

Egy urnában N golyó közül M piros, a többi fehér. Egymás után egy-egy golyót kihúzva, (de azt vissza nem téve,) kiválasztunk közülük n darabot találomra (vagyis minden húzáskor bármelyik golyó kiválasztása egyenlő valószínűségű). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók között a pirosak ξ száma adott k-val legyen egyenlő?

Antal megoldása: „Mivel bármely golyó húzása egyenlően valószínű, annak valószínűségét, hogy a kihúzott golyók közt a pirosak száma k, a klasszikus képlettel számolhatjuk:

$$P(\xi = k) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes lehetséges eset száma}}.$$

Az összes lehetséges eset száma annyi, ahányszor N-ből n-et kiválaszthatunk (sorrendre való tekintet nélkül), vagyis $\binom{N}{n}$.

Kedvező esetet kapunk, ha az M pirosból k-t, az $N-M$ fehér golyóból $n-k$ darabot választottunk ki. M pirosból k-t kiválasztani $\binom{M}{k}$-féleképpen lehet, $N-M$ fehérből $(n-k)$-t kiválasztani $\binom{N-M}{n-k}$-féleképpen lehet. Mivel egy alkalommal k piros kiválasztásához $\binom{N-M}{n-k}$ fehér kiválasztási lehetőség párosul, $\binom{M}{k}$ lehetőséghez összesen $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ kedvező lehetőség tartozik. Így a keresett valószínűség

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$"

Béla megoldása: „Mennyi annak a valószínűsége, hogy az *első* k alkalommal pirosat, utána meg $n-k$ alkalommal fehéret húzunk?

Annak valószínűsége, hogy elsőre pirosat húzunk, $\frac{M}{N}$, hogy másodikra is pirosat húzunk, $\frac{M-1}{N-1}$, és így tovább: annak valószínűsége, hogy k-adik alkalommal is pirosat húzunk, $\frac{M-(k-1)}{N-(k-1)}$ (hiszen a golyók száma minden húzáskor eggyel csökken). Ugyanígy annak valószínűsége, hogy a következő alkalmakkor fehéret húzunk (összesen $n-k$ esetben), rendre

$$\frac{N-M}{N-k}, \frac{N-M-1}{N-k-1}, \ldots, \frac{N-M-(n-k-1)}{N-k-(n-k-1)}.$$

Mivel ezek a választások egymástól függetlenül történnek, együttes bekövetkezésük valószínűsége az egyes valószínűségek szorzata. Annak valószínűsége tehát, hogy az *első* k alkalommal pirosat, utána $n-k$ alkalommal fehéret húzunk,

$$P = \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} \cdots \frac{M-k+1}{N-k+1} \cdot \frac{N-M}{N-k} \cdot \frac{N-M-1}{N-k-1} \cdots \frac{N-M-n+k+1}{N-n+1}.$$

Ugyanennyi például annak valószínűsége, hogy elsőre fehéret, utána k pirosat, azután a többi esetben ismét fehéret húzunk;

$$P=\frac{N-M}{N}\cdot\frac{M}{N-1}\cdots\frac{M-k+2}{N-k+1}\cdot\frac{M-k+1}{N-k}\cdot\frac{N-M-1}{N-k-1}\cdots\frac{N-M-n+k+1}{N-n+1},$$

ugyanis csak a számlálóban cseréltük fel a tényezőket. Sőt, *ugyanennyi* annak valószínűsége, hogy az n eset közül *bármely* k kijelölt esetben pirosat, a többiben fehéret húzunk (csak a számlálóban kell a tényezőket felcserélni). Ilyen eset összesen annyiszor lehetséges, ahányszor (sorrendre való tekintet nélkül) n helyből k-t kijelölhetünk a piros előbukkanására, így ezeknek az eseteknek a száma $\binom{n}{k}$.

Az az esemény, hogy n választáskor k pirosat, $n-k$ fehéret húzunk, úgy keletkezik, hogy vagy az egyik, vagy a másik és így tovább, vagy az $\binom{n}{k}$-adik előbb említett esemény következik be, vagyis a $\xi=k$ esemény az előbbi $\binom{n}{k}$ db esemény összege. Ezek az események egymást páronként kizárják (mert ha például az első k alkalommal húztunk pirosat, akkor nem áll fenn, hogy más k kijelölt helyen bukkant elő piros golyó).

Egymást páronként kizáró események összegének valószínűsége az egyes valószínűségek összegével egyenlő. Vagyis annak valószínűsége, hogy n húzásból a piros golyók száma $\xi=k$, a fehéreké $n-k$,

$$P(\xi=k)=\binom{n}{k}\frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}\cdots\frac{M-k+1}{N-k+1}\cdot\frac{N-M}{N-k}\cdot\frac{N-M-1}{N-k-1}\cdots\frac{N-M-n+k+1}{N-n+1}.$$

Szerintem ez a jó megoldás, nem az előző."
Hol a hiba?

II.

1. Egy megoldás, amely nem megoldás

A kiszámolt z értékek által keletkező **b** és **a** hajlásszögének cosinusa a

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

képlet alkalmazásával:

$$\frac{-9+3\cdot 0{,}6168}{\sqrt{38}\sqrt{5+0{,}6168^2}}=-\frac{1}{2},$$

illetve

$$\frac{-9+3(-108{,}6168)}{\sqrt{38}\sqrt{5+(-108{,}6168)^2}}=-\frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy a szög mindkét esetben 120°-os. Bélának tehát igaza van. Az új gyökök bejövetelét az okozza, hogy a

$$-9+3z=\frac{1}{2}\sqrt{38}\sqrt{5+z^2}$$

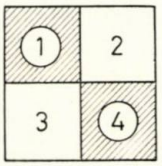
egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve ugyanazt az egyenletet kapjuk, mintha a

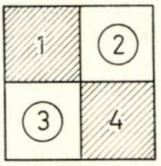
$$-9+3z=-\frac{1}{2}\sqrt{38}\sqrt{5+z^2}$$

egyenlet mindkét oldalát emelnénk négyzetre. A négyzetreemelés új gyököt behozhat, az eredeti egyenlet gyökeit nem veszti el. Ez azt jelenti most, hogy az eredeti $\left(+\frac{1}{2}\text{-et}\right.$ tartalmazó) egyenletnek nincs valós gyöke.

2. 40 320 egyenlő-e 40 320²-nel?

Béla megoldása hibás. Ennél az okoskodásnál ugyanis nem ügyelünk arra, hogy minden lehetséges esetet csak egyszer számoljunk össze. Például a $2\cdot 2$ négyzetet tartalmazó sakktáblánál (ahol nyilván csak az ábrán látható 2 eset van), ezzel az okoskodással négy esetet kapunk, mert két esetnek tekintjük az $1-4$ és a $4-1$ négyzetek kiválasztását, ugyancsak két esetnek tekintjük a $2-3$ és a $3-2$ négyzetek kiválasztását. Ugyanez a helyzet a $8\cdot 8$ mezős sakktáblánál is.





3. Bombabiztos repülőút

Az egymástól független események együttes bekövetkezésére vonatkozó

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

szabály most is igaz, csak az A esemény (az, hogy Antal bombát visz magával) most biztos esemény, amelynek valószínűsége 1. Ezért annak valószínűsége, hogy egy másik bomba is legyen a gépen,

$$P(AB)=1\cdot 0{,}0001=0{,}0001,$$

vagyis ugyanannyi, mintha Antal nem vinne magával bombát.

4. Teljesen begolyóztunk

Semmiféle hiba nincs, a két módon kiszámított valószínűség ugyanannyi. Alakítsuk át mindkét eredményt úgy, hogy csak faktoriálisok szerepeljenek, és használjuk fel az

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k}\cdot\frac{(n-k)(n-k-1)\dots 1}{(n-k)(n-k-1)\dots 1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot$$

azonosságot.

Antal eredménye így alakítható:

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{M!}{k!(M-k)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(n-k)!(N-M-n+k)!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$= \frac{M!(N-M)!\, n!(N-n)!}{N!\, k!(M-k)!\,(n-k)!\,(N-M-n+k)!}.$$

Béla eredménye így alakítható:

$$\binom{n}{k} \cdot \overbrace{\frac{M(M-1)\dots(M-k+1)}{N(N-1)\dots(N-k+1)} \cdot \underbrace{\frac{(M-k)(M-k-1)\dots 1}{(M-k)(M-k-1)\dots 1}}_{(M-k)!}}^{M!} \cdot$$

$$\cdot \overbrace{\frac{(N-M)(N-M-1)\dots(N-M-n+k+1)}{(N-k)(N-k-1)\dots(N-n+1)} \cdot \underbrace{\frac{(N-M-n+k)\dots 1}{(N-M-n+k)\dots 1}}_{(N-M-n+k)!}}^{(N-M)!} \cdot \overbrace{\frac{(N-n)\dots 1}{(N-n)\dots 1}}^{(N-n)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{M!}{(M-k)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(N-M-n+k)!} \cdot \frac{(N-n)!}{N!}.$$

Ez pedig (a tényezők sorrendjétől eltekintve) ugyanaz, mint amit Antal kapott.

MUNKAKÖZÖSSÉG*
Budapest

Tanulók önálló feladatmegoldása számítógép segítségével

Bevezetés

1977 kora tavaszán azon töprengtünk néhányan, hogyan lehetne a számítógépeket a reguláris oktatásban felhasználni: Mint mindenki, mi is úgy képzeltük, ehhez olyan tv-készülék kell, amelyen megjelenhet a tanár, a tananyag, a feladat, és amelyhez kellő számú gomb csatlakozik, hogy a tanuló közölhesse a rendszerrel tudása pillanatnyi állapotát. Nem akartunk azonban belenyugodni abba, hogy pusztán azért, mert ez ma még elérhetetlen, ne csináljunk semmit. Így — szükségmegoldásként — támadt az ötletünk, hogy nagy teljesítményű, az iskolától távol levő számítógépet használjunk feladatlapok írására. Célunk kezdetben a technikai részletek tisztázása volt, annak eldöntése, lehetséges-e egyáltalán huzamosan dolgozni ezzel a módszerrel.

A kísérlet támogatását a Surányi János által vezetett Módszertani Csoport vállalta. Magára a kísérletre először 1978 februárjában került sor a Toldy gimnáziumban. Kicsit még nyers volt a program, de sikerült a kísérletet végigvinni. Kíváncsiak voltunk arra, hogy milyen mértékben terjeszthető az anyag,

* A munkaközösség tagjai: *Bíró Adrien* tanár, *Bod Judit* tudományos munkatárs, *Gara Ernőné* tanár, *Halmos Istvánné* tudományos munkatárs, *Papp Andorné* tanár, *dr. Tusnády Gábor* tudományos főmunkatárs és *Varga Katalin* tudományos munkatárs.

ezért 1980 tavaszán lényeges változtatás nélkül megismételtük a kísérletet az Eötvös gimnáziumban. Most a két kísérlet tapasztalatairól szeretnénk röviden beszámolni:

Ahogyan elkezdtük

Látszólag a legkézenfekvőbb megoldás az lett volna, hogy a gépbe betápláljuk a megfelelő tananyagot, a feladatok megoldását, a gép majd figyelemmel kíséri a gyerekek munkáját, és a megfelelő ponton segít nekik. Azonban ezt a lehetőséget el kellett vetnünk, mert hiába tanítanánk meg a gépnek a szabályokat, attól az még képtelen észrevenni egy gondolatmenetben a hibát. Arra pedig gondolni sem mertünk, hogy minden lehetséges gondolatmenetre felkészítsük a gépet, hiszen egy egyszerű egyenletrendezést is 2-3 módon lehet elvégezni, és ahogy bonyolódnak a feladatok, úgy nő a lehetséges megoldások száma. Mivel a gép perifériái igen költségesek, ez a módszer nagyon megdrágítaná a rendszert. Emiatt nagymértékben korlátoznunk kellett a tanuló és a gép közötti információcserét. Tehát a mi gépünk csak adminisztratív szerepet kapott, általunk elkészített feladatokat adott a gyerekeknek, azoknak általunk adott megoldásait vetette össze a tanulók megoldásaival.

De valójában mit jelent egy feladat megoldása? Azt már láttuk, hogy gondolatmenetet a gép nem tud ellenőrizni, így csak az a lehetőség adódott, hogy végeredmények alapján értékeljen. Tudjuk, hogy ez a megoldás nem tökéletes, hiszen egy feladat megoldásának elbírálása során más hangsúlyt kap egy számolási hiba, mint egy elvi tévedés. Mivel azonban az órák után az egész osztály „termését" le akartuk lyukasztani, más választásunk nemigen maradt.

Eredeti terveink szerint a feladatanyagot a gép tartalmazná. Biztos másképp hat a diákokra, ha a feladatokat maga a gép adja nekik. Ha elterjed a rendszer, a feladatokat is tartalmazni fogja a gép, de a kísérleti jelleg miatt magukat a feladatokat nem tettük bele a gépbe, hanem egy közös feladatgyűjteményből a gép jelölte ki a tanulók számára a feladatokat.

A feladatok kódolása

A gépbe tehát csak a feladatok következő adatai kerültek be:

— a feladat sorszáma,
— a feladat témaszáma,
— a feladat nehézsége,
— a feladat megoldásához szükséges idő,
— a feladat megoldásához szükséges önállóság mértéke,
— a részfeladatok száma,
— a részfeladatok végeredménye.

Sokat bajlódtunk azzal az ártatlannak látszó problémával is, hogy az egyes feladatok végeredményét kanonikus alakra hozzuk. Ennek talán csak az volt az oka, hogy a programot magunk írtuk, és ki minek nem mestere, gyilkosa lesz annak. Talán mégsem minden tanulság nélküli ez a részlet sem. Nálunk kétféle eredmény lehetett: szám vagy szöveg. A szövegeket külön kódoltuk, külön tároltuk őket, a feladatoknál csak a hivatkozási számaikat adtuk meg. Ez adta az ötletet, hogy „üzeneteket" írjunk a gyerekeknek: amikor óra után átfutottuk a feladatlapokat, amit mondani akartunk a gyereknek, azt külön lelyukasztottuk, és mondandónkat a gép kiírta a következő feladatlapra. Nem volt ez más, mint a gép afféle cirkuszi automatává degradálása, amelyikbe ember van bújtatva, mégis sok hasznát láttuk.

A számoknál is baj volt, hogy azoknak is többféle alakjuk lehet, változó a hosszuk, a számuk, a pontosságuk, de ezeket még mi is kellő körültekintéssel adminisztrálni tudtuk. Mindenesetre egy idő után beleírtuk a programba, hogy a tanár felülbírálhassa a gépet, és ha a tanár úgy dönt, hogy a tanuló valamelyik feladatot megoldotta, akkor azt a gép egyszerűen vegye tudomásul.

Hogyan működik a program?

Az anyagrész, amit feldolgoztunk, az első gimnazista tananyag „Egyenletek" című témája. Ezt résztémákra bontottuk, amelyeket témagráf kapcsol össze. A témagráf szerepe rendkívül fontos, szinte ez a rendszer „szíve", a gép ugyanis a feladatok kiadásánál ezen halad végig.

A résztémák:

11. Lineáris függvény inverzének értéke adott helyen.
12. Abszolútértéket is tartalmazó függvény inverzének értéke adott helyen.
13. Abszolútértéket is tartalmazó függvény szélsőértékei.
14. Függvények értékkészletére vonatkozó egyenlőtlenségek.
21. Behelyettesítés.
22. Egyenletek gyökének megtalálása véges sok eset között.
31. Összevonások ellenőrzése.
32. Algebrai összefüggéseket szemléltető numerikus műveletek.
33. Összevonások.
34. Algebrai bizonyítás (ennek helyességét a tanár ellenőrzi: 1 a helyes, 0 a helytelen megoldás).
35. A polinomokkal végzett műveletek szabályai.
36. Egytagúak szorzása.
37. Egytagúak szorzása többtagúakkal.
38. Többtagúak szorzása.
39. Kiemelés.
50. Művelet-láncok eredményének az ellenőrzése.
51. Művelet-láncok invertálása.
52. Diofantikus egyenletek.
53. Mérlegelésre vezető szöveges feladatok.
54. Több jegyű számokra vonatkozó szöveges feladatok.
55. Művelet-láncok invertálása.
56. Életkorra vonatkozó feladatok.
57. Mozgásos feladatok.
58. Keverékekre vonatkozó feladatok.
59. Paraméteres szöveges példák.
60. Csapok együttes teljesítménye.
61. Törtekre vonatkozó feladatok.
62. Együttes munkavégzésre vonatkozó feladatok.
80. Egyszerű magasabb fokú egyenletek.
81. Additív lebontogatással megoldható egyenletek.
82. Multiplikatív lebontogatással megoldható egyenletek.
83. Additív mérlegelv.
84. Multiplikatív méglegelv.
85. Paraméteres egyenletek.
86. Algebrai törteket tartalmazó egyenletek.
87. Transzcendens egyenletek grafikus megoldása.
88. Új változó bevezetése.
89. Vegyes típusú egyenletek.
90. Lebontogatással megoldható egyenlőtlenségek.
91. Egyenlőtlenségek megoldása additív mérlegelvvel.

92. Egyenlőtlenségek megoldása multiplikatív mérlegelvvel.
93. Egyenlőtlenség rendszerek.
94. Paraméteres egyenletekből származó egyenlőtlenségek.
95. Szorzatokat tartalmazó egyenlőtlenségek.
96. Algebrai törteket tartalmazó egyenlőtlenségek.
97. Abszolút értéket is tartalmazó egyenlőtlenségek.
98. Szöveges egyenlőtlenségek.
99. Egyenlőtlenségek szabályai.

A kísérlet elején a tanárnak rangsorolnia kell a tanulókat, mindenki kap egy nehézség-, önállóság-, időparamétert. Az első feladatlapokon mindenki számára az 1-es témához csatlakozó résztémákból szerepelnek feladatok. (Az ábrán az 1-es téma virtuális, csak az indítást egyszerűsíti a felvétele.) Egy-egy téma akkor nyílik meg valamelyik tanuló számára, ha abból már oldott meg jól feladatot. A már megnyílt témákhoz kapcsolódó témákból kaphat a tanuló feladatokat. A gép a feladatokat egy adott témán belül az ún. index alapján választja ki, úgyhogy lehetőleg olyan idexű feladatot választ, mint amennyi a diák indexe a témán belül. (Az index a nehézség és az önállóság paraméterek összege mind a tanulóknál mind a feladatoknál.) Ha a tanuló helyesen oldott meg egy feladatot, akkor indexe eggyel nő, ha hibásan, akkor 2-vel csökken, ha nem foglalkozott a feladattal, az index változatlan marad. Ha egy témán belül valakinek az indexe eléri a maximális értéket, „kicsordul" a témából: ebből már nem kap újabb feladatot. Ugyanez történik akkor is, ha a témán belül nincs a tanulónak kiadható feladat. Ha a tanuló témaindexe 0 alá csökken, akkor a gép automatikusan 0-ra állítja azt.

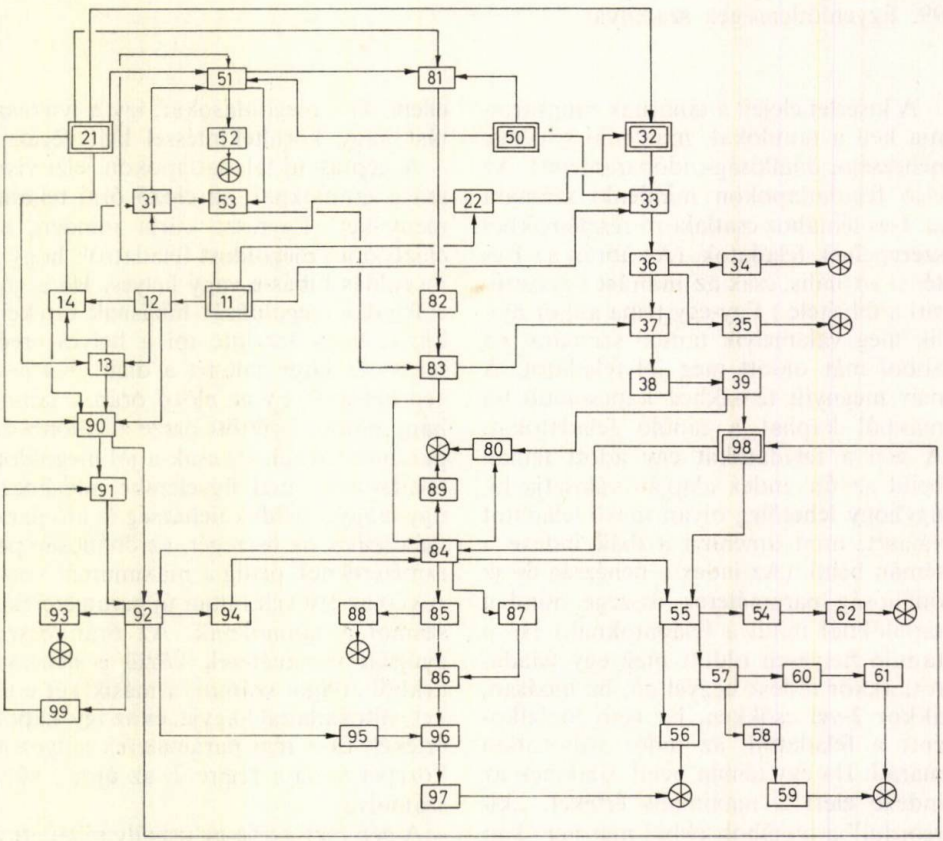
Az óra után a tanár, vagy a „segédje" elkészíti a tanulók „válasz" kártyáit. Ezek formátuma a következő: az első három karakterre kerül a feladatmegoldó sorszáma, aztán egy feladat száma, majd a végeredmény lehetőleg azonos formátumban, mint a feladatok adatkártyáin, majd egy újabb feladat sorszáma, és így tovább. A gép karakterről karakterre ellenőrzi a megoldásokat, így a lyukasztást nagy körültekintéssel kell végezni.

A gép az új feladatlapokon jelzi vissza a tanulóknak az előző órai teljesítményüket. Egyrészt kiírja minden, az előző órán megoldott feladatról, hogy a megoldás hibás-e vagy helyes. Ha a gép a feladat megoldását hibásnak értékeli, kiírja, hogy szerinte mi a helyes eredmény, és hogy mit írt a diák. Kiírja a gép azt is, hogy az előző órán a tanuló hány pontot gyűjtött össze a különböző paraméterekből. Itt csak a jól megoldott feladatokat veszi figyelembe, méghozzá úgy, hogy a példák nehézség és idő paramétereinek az összegét, az önállóság paramétereknek pedig a maximumát veszi. A gép az értékelés után új paramétereket számol a tanulóknak. Az órán összegyűjtött paraméterek közül a nehézségekből átlagot számol, a másik két értéket változatlanul hagyja, és az így kapott értékek és a régi paraméterek súlyozott közepét veszi a régire 2, az újra 1 súlyt számolva.

A gép még kiírja az osztály pillanatnyi helyzetét a témagráfra. Ez egy mátrix formájában jelenik meg, melynek A_{ij} eleme jelzi, hogy a j-edik tanuló hogyan áll az i-edik témában. Ha A_{ij} értéke nulla, akkor a diák ebbe a témába még nem lépett be. Ha értéke 100-nál kisebb, akkor még nem született jó megoldása a téma feladataiból, de már próbálkozott vele. Ekkor az A_{ij} értéke megegyezik a tanuló indexével a témán belül. Ha A_{ij} nagyobb 100-nál, akkor már megoldott a diák jól feladatokat a témából, tehát megnyílt számára ez az anyagrész. A_{ij} értéke itt azt mutatja, hogy hány téma

nyílt meg a tanuló számára ezen a témán keresztül, illetve mekkora itt az indexe. Az elsőt a százasok helyén álló szám jelzi, a másodikat a tízesek és egyesek mutatják. Ha $A_{ij}=50$, akkor a tanuló kicsordult ebből a témából.

Témagráf:



Megjegyzés: A kettős keretben levő témák nyílhatnak meg az első feladatlapokon. A csillaggal jelzett témákról indulhat a következő anyagrész.

A kísérlet értékelése

Az anyagot úgy dolgozták fel a tanulók, hogy előtte nem hallottak semmit az elméletéből, csak az általános iskolai tapasztalataikra és a gimnáziumban tanult „Függvények" című témakörre támaszkodhattak. Az utolsó órán megkérdeztük az osztályt arról, mi a véleményük a kísérletről, hogy tetszett nekik az ilyen munka, milyen hibákat és hiányosságokat találtak benne, és szerintük hogyan kéne továbblépnünk. Nagyon sok érdekes megjegyzés hangzott el. A tanulók elsősorban azt hiányolták, hogy nem tudnak utánanézni annak, hogy miért voltak rosszak megoldásaik, ezért sokszor ismételten elkövették ugyanazt a hibát.

Ebben teljes mértékben igazuk volt. Mi attól féltünk, hogy ha óráról órára visszadjuk az előző feladatlapjukat, hosszú időt venne nekik igénybe azok végignézése, és nem maradna idő az új feladatokkal foglalkozni. Talán nincs is szükség arra, hogy minden órán láthassák, hogy milyen hibáik voltak az előző feladatlapokon. Helyesebb, ha közben jól megválasztott időközönként egy-két órát megbeszélésekre szánunk, amikor a tanulók megnézhetik a feladatlapjaikat és a típushibákat együttesen megbeszélhetik. Ebben segíti a tanárt a tanuló-téma mátrix, hiszen az mutatja, hogy az osztály többsége mikor fejez be egy-egy résztémát, és ekkor célszerű az ott felvetődött problémákat megtárgyalni.

Általában a diákok szerettek a géppel dolgozni, bár olykor megdöbbentette őket az, ha olyan dolgokat kérdeztünk tőlük, amit még nem tanultak. De miután megígértük, hogy nem fogjuk osztályozni őket, szívesen gondolkodtak a problémákon. Volt olyan tanuló is, aki kezdetben nem volt hajlandó egyedül dolgozni, mert állítása szerint már elfelejtette, hogyan kell az egyenleteket megoldani. Legnagyobb meglepetésünkre, miután rájött, hogy nem felejthette el, hiszen sosem tanulta, „megtáltosodott", és a gép rangsora szerint az egyik legjobb eredményt érte el, holott a tanárai az osztály leggyengébb tanulójának ismerték. A diákok viszonylag hamar beleszoktak abba, hogy önállóan dolgozzanak, bár egy-egy példa megoldása közben gyakran kérték segítségünket. Ekkor rávezető kérdésekkel irányítottuk a megoldásukat. Az is előfordult néhányszor, hogy ha több tanuló kapta ugyanazt a feladatot, egyszerűen lemásolták egymásról az eredményeket. Mi ebből nem csináltunk ügyet, de ha a rendszert szélesebb körben bevezetnénk, ezt a veszélyt el lehet hárítani úgy, hogy lényegesen több feladat közül választhasson a gép, vagy az azonos típusú feladatokban szereplő paramétereket a gép generálhassa, ami eleve kizárná, hogy két tanuló ugyanazt a feladatot kapja.

A mostani kísérletnél nem figyeltük azt, hogy valóban a saját szintjükön dolgoznak-e a tanulók. Ennek két oka is volt; egyrészt a feladatanyagunk nagyon kevés volt, nemigen volt nehéz feladatunk, illetve egy-egy témán belül egyszintűek voltak a példák. Így kénytelenek voltunk egy ún. könnyítő faktort betenni a gépbe, hogy a tanuló az indexénél könnyebb feladatot is kaphasson. Másrészt a példák paraméterezése valószínűleg nem volt egyenletes, könnyű feladatokat nehéznek nyilvánítottunk és fordítva.

Hogyan lehet továbblépni?

Mint már vázoltuk, rengeteg hiányossága van még a rendszernek, és talán még több az olyan pont, amit különkülön ki kell próbálni. Ilyen például a feladatok paraméterezése, a tanulók új paramétereinek kiszámításánál a súlyok megválasztása. Az ilyen jellegű paramétereknek az értékét ugyanis teljesen találomra választottuk; az igazán jó értékek megtalálásáig még sokszor le kellene futtatni a programot.

Jó lenne sok más témát feldolgozni, hiszen egy téma eredményei félrevezetőek lehetnek. De még korai lenne bármiféle egységesítés. Inkább a részletek kidolgozását tartjuk fontosnak, lehetőleg színes, szórakoztató feladatlapokat generáltatni a géppel, egy-egy téma levelező jellegű feldolgozását, amit szakkörök is kipróbálhatnak. Kísérletünk azt bebizonyította, hogy a dolog fizikailag lehetséges, úgy gondoljuk, most már ideje a pedagógiai részletekkel foglalkozni.

A Bolyai János Matematikai Társulat által a matematikatanárok számára rendezett 1982. évi verseny eredménye

A versenybizottság értékelése alapján

I. díjat (2000 Ft-ot) nyert: **Bartha Gábor,** a szentendrei Móricz Zsigmond Gimnázium tanára;

II. díjat (1500 Ft-ot) nyert: **Csörsz Sándor,** a Dunakeszi Gimnázium tanára.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10., II. 10. 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!) A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1029. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^4 - 4x + 3 = y^2$$

egyenletnek végtelen sok *racionális* $(x; y)$ megoldása van!

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

1030. Legyen P a szabályos n-szög egy, a csúcsponttól különböző tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos n-szögnek vannak olyan A_i, A_j csúcspontjai, amelyekre

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi \leqq A_i P A_j \sphericalangle \leqq \pi.$$

Strohmajer János, Budapest

1031. Egy ország n városa közül bármely kettőt közvetlen repülőjárat vagy hajóút köt össze. Bizonyítsuk be, hogy bármelyik városba eljuthatunk csak repülőn vagy csak hajón utazva is!

Kvant

1032. Melyek azok a pozitív valós számok, amelyek kielégítik az

$$x^{\ln\frac{y}{z}} + y^{\ln\frac{z}{x}} + z^{\ln\frac{x}{y}} = 3$$ egyenletet?

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

1033. Legyen $P(x)$ egy legalább elsőfokú, egész együtthatós polinom! Jelölje $n(P)$ mindazon k egész számok számát, amelyekre $P^2(k) = 1849$. Igazoljuk, hogy

$$n(P) - grad\,(P) \leqq 86,$$

ahol $grad\,(P)$ a polinom fokszámát jelöli.

Bencze Mihály, Brassó

1034. Az A szabályos hétszög másod-, illetve harmadszomszéd csúcsaira illeszkedő átlói egy-egy B, illetve C szabályos hétszöget határolnak. Bizonyítsuk be, hogy a B harmadszomszéd átlói ugyanazt a szabályos hétszöget határolják, mint a C másodszomszéd átlói! Általánosítsuk feladatunkat!

Kárteszi Ferenc, Budapest

Feladatmegoldások (1005—1010.)

1005. Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$4xyz = (y+z)(yz+2) = (x+z)(xz+2) = (x+y)(xy+2)$$

Deák Imre, Székelyudvarhely

Megoldás: Feltehető, hogy $0 < x \leqq y \leqq z$. Ekkor

$$(x+y)(xy+2) \leqq (x+z)(xz+2) \leqq (y+z)(yz+2),$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x=y=z$. Így egyenletrendszerünk megoldásai a

$$4x^3 = 2x(x^2+2)$$

egyenlet megoldásai közül valók. Ebből $x>0$ miatt rendezés után az

$$x^2 = 2, \quad \text{azaz} \quad x = \sqrt{2} \quad \text{adódik.}$$

Könnyen látható, hogy az $x=y=z=\sqrt{2}$ valóban megoldása egyenletrendszerünknek, s a fentiek szerint az egyetlen.

Magyar Ákos, Budapest

Megjegyzés: Ha egyenletrendszerünk megoldásait a valós számok **R** halmazán keressük, akkor kivonással a

$$(z-x)(y^2+yz+xy+2) = 0 \qquad (a)$$

egyenletet és változócserékkel ebből az

$$(y-x)(z^2+yz+xz+2) = 0 \qquad (b)$$

és

$$(z-y)(x^2+xz+xy+2) = 0 \qquad (c)$$

egyenleteket nyerjük.

(1.) Ha most $x=z$, akkor a

$$4x^2y = 2x(x^2+2)$$

és az

$$(y-x)(2x^2+xy+2) = 0$$

egyenletekből az $x \neq y$ nem ad megoldást, így eredeti egyenletrendszerünknek a most tárgyalt esetben csakis a

$$\{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}); (0, 0, 0); (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})\}$$

halmaz elemei szolgáltatnak megoldást.

(2.) Ha $x \neq z$, akkor mind az $x=y$, mind az $y=z$ feltételezés — előbbi mintájára — nem ad megoldást, ugyanis például az $x=y$ esetén a

$$2x^2+xz+2 = 0$$

és

$$4x^2z = 2x(x^2+2)$$

egyenletekből $x \neq 0$ miatt $5x^2+6=0$ következik. Ha viszont x, y, z között nincs két egyenlő, akkor az *(a)*, *(b)*, *(c)* egyenleteket egyszerűsítés után összeadva az

$$(x+y+z)^2+6 = 0$$

adódik, aminek nincs valós gyöke, tehát egyenletrendszerünknek az **R** halmazon három megoldása van, az (1.)-ben tárgyaltak.

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 16.

1006. A $b=3k+1$ alapú számrendszerben hány olyan xyz_b háromjegyű szám van, amelyben a jegyek különbözők, egyikük sem nulla, és a jegyek ciklikus cseréjével adódó xyz_b, yzx_b, zxy_b számok a felírt sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő eleme?

Megoldás: Az xyz_b, yzx_b, zxy_b e sorrendben akkor és csak akkor egy mértani sorozat három egymást követő eleme, ha

$$(xb^2+yb+z)(zb^2+xb+y) = (yb^2+zb+x)^2,$$

amiből rendezés után

$$(xz-y^2)b^4+(x^2-yz)b^3-(xz-y^2)b-(x^2-yz) = 0,$$

azaz

$$(b^3-1)[b(xz-y^2)+x^2-yz] = 0.$$

A $b>1$ miatt tehát

$$b(xz-y^2) = yz-x^2$$

kell legyen. Ha most $xz-y^2=0$, akkor $x^2-yz=0$ is fenn kell álljon, amelyekből az $y(>0)$, illetve $x(>0)$ számokkal való szorzás után $x^3=y^3$, azaz $x=y$ kell legyen, amit feltételünk kizár. Ezért

$$b = \frac{x^2-yz}{y^2-xz}. \qquad (*)$$

Megmutatjuk, hogy ha $k\geqq 2$, akkor legalább két megoldása van előbbi egyenletünknek ($k=1$-re — mint könnyen látható — nincs megoldás).

Legyen $x=c(k+1)$, $y=ck$, $z=c(k-1)$, ahol c pozitív egész! E választásra

$$b = \frac{c^2(k^2+2k+1)-c^2(k^2-k)}{c^2k^2-c^2(k^2-1)} = 3k+1.$$

Tehát a b alapú számrendszerben a fenti választás olyan háromjegyű számot ad, amely jegyeinek ciklikus cseréjéből adódó három szám $\dfrac{k}{k+1}$ hányadosú mértani sorozatot ad. Mivel

$$2(k+1) < 3k+1 < 3(k+1),$$

ezért $c=1$ vagy $c=2$ lehet csak.

További megoldásokat — és rögzített k mellett valamennyit — megkaphatjuk az alábbi két, — (ZX 81) számítógépre írt — BASIC nyelvű program segítségével.

A ($*$)-ból következik, hogy a jobb oldali hányados akkor és csak akkor pozitív, ha számlálója és nevezője egyező előjelű. Mivel $b>1$, ezért

$$x^2-yz > y^2-xz > 0 \quad \text{vagy} \quad x^2-yz < y^2-xz < 0,$$

amiből

$$(x-y)(x+y+z)>0 \quad \text{vagy} \quad (x-y)(x+y+z)<0.$$

Az $x+y+z>0$ miatt tehát

$$x > y \quad \text{vagy} \quad x < y.$$

Emiatt

$$0 < y^2-xz < y^2-yz = y(y-z) \quad \text{vagy} \quad y(y-z) = y^2-yz < y^2-xz < 0,$$

tehát

$$x > y > z \quad \text{vagy} \quad x < y < z.$$

```
10 LET   K=2
15 FOR   X=3*K TO 3 STEP -1
20 FOR   Y= 1 TO X-1
25 FOR   Z= 1 TO Y-1
30 IF    Y*Y - X*Z = 0 THEN GOTO 100
35 LET   B=(X*X-Y*Z)/(Y*Y-X*Z)
40 IF    B=3*K+1 THEN PRINT X;"/"; Y; "/"; Z; " "; B
50 NEXT  Z
60 NEXT  Y
70 NEXT  X
80 LET   K=K+1
90 GOTO  15
```

```
10 LET   K=2
15 FOR   Z=3 TO 3*K
```

```
20 FOR   Y=1 TO Z-1
25 FOR   X=1 TO Y-1
30 }
35 }     lásd előbb
40 }
50 NEXT  X
60 NEXT  Y
70 NEXT  Z
80 LET   K=K+1
90 GOTO  15
```

E programok eredményeként kapjuk az alábbi számhármasokat $(2 \leqq k \leqq 16)$

x	y	z	b
6	4	2	7
3	2	1	
8	6	4	10
4	3	2	
10	8	6	13
5	4	3	
12	10	8	16
10	4	1	
6	5	4	
2	4	9	
1	3	11	
14	12	10	19
7	6	5	
16	14	12	22
15	5	1	
8	7	6	
2	5	14	

x	y	z	b
23	17	12	25
18	16	14	
14	7	3	
9	8	7	
4	7	13	
1	4	19	
20	18	16	28
10	9	8	
22	20	18	31
11	10	9	
24	22	20	34
12	11	10	
33	15	6	37
28	7	1	
26	24	22	
22	10	4	
13	12	11	
11	5	2	
5	10	21	
2	7	27	

x	y	z	b
28	26	24	40
14	13	12	
30	28	26	43
15	14	13	
36	8	1	46
34	19	10	
32	30	28	
26	13	6	
16	15	14	
7	13	25	
2	8	35	
48	30	18	49
40	25	15	
34	32	30	
32	20	12	
24	15	9	
20	30	46	
17	16	15	
16	10	6	
10	15	23	
8	5	3	
1	6	41	

1007. Legyen f a pozitív egész számok halmazán definiált függvény. Számítsuk ki a

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

értéket, ha $f(1)=6$ és $f(x+y)=f(x)2^y+f(y)2^x+9\cdot 2^{x+y}$ minden x, y pozitív egészre!

Pogány János, Budapest

Megoldás: Számítsuk ki k első néhány értékére $f(k)$-t!

$$f(1) = 6,$$
$$f(2) = 6\cdot 2+6\cdot 2+9\cdot 2^2 = 60,$$
$$f(3) = f(2)\cdot 2+6\cdot 2^2+9\cdot 2^3 = f(2)\cdot 2+12\cdot 2^3,$$
$$f(4) = f(3)\cdot 2+6\cdot 2^3+9\cdot 2^4 = f(2)\cdot 2^2+24\cdot 2^4,$$
$$f(5) = f(4)\cdot 2+6\cdot 2^4+9\cdot 2^5 = f(2)\cdot 2^3+36\cdot 2^5.$$

Ezekből sejtésünk:

$$f(k) = 2^{k-2}\cdot f(2)+12(k-2)\,2^k \qquad (*)$$

minden pozitív egész $k(\geqq 2)$-ra.

Sejtésünket teljes indukcióval igazoljuk. Tegyük fel, hogy $(*)$ igaz! A k első néhány értékére láttuk, hogy sejtésünk igaz.

$$f(k+1) = f(k)\cdot 2+6\cdot 2^k+9\cdot 2^{k+1} = 2[2^{k-2}\cdot f(2)+12(k-2)\,2^k]+6\cdot 2^k+9\cdot 2^{k+1} =$$
$$= 2^{k-1}\cdot f(2)+12(k-2)\,2^{k+1}+12\cdot 2^{k+1} = 2^{k-1}\cdot f(2)+12(k-1)\cdot 2^{k+1},$$

és ezt kellett igazoljuk. Tehát

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = 6 + \sum_{k=2}^{n} [60 \cdot 2^{k-2} + 12(k-2)2^k] = 6 + 60(2^{n-1} - 1) + 12 \sum_{k=2}^{n} k2^k - 24 \sum_{k=2}^{n} 2^k =$$

$$= 6 + 60 \cdot 2^{n-1} - 60 + 12(n-1)2^{n+1} - 96(2^{n-1} - 1) = 12(n-1)2^{n+1} - 36 \cdot 2^{n-1} + 42,$$

mert

$$\sum_{k=2}^{n} 2^k = 4(2^{n-1} - 1) = 4 \sum_{k=2}^{n} 2^{k-2} \quad \text{és} \quad \sum_{k=2}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1}.$$

Ez utóbbi azonosságot többféleképpen is igazolhatjuk. Egyik lehetőségünk a teljes indukció.

Honti Dénes, Győr

Megjegyzések:

(1.) Az értelmezés kiterjeszthető minden valós számra is, és ha f folytonosságát feltételezzük, akkor a ($*$)-gal összhangban

$$f(x) = 3(4x-3)2^x$$

minden valós x-re.

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

(2.) Ha $f(1) = 3a$ és

$$f(x+y) = f(x) \cdot a^y + f(y) \cdot a^x + 9 \cdot a^{x+y},$$

ahol a rögzített valós szám, akkor

$$b(x) = 3(4x-3) \cdot a^x.$$

Szánthó Gyula, Gyula

A megoldók száma: 18.

1008. Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív tagú (x_n) sorozatra

$$x_1 \leqq \frac{1}{2a} \quad \text{és} \quad x_{n+1} = x_n - ax_n^2,$$

akkor az (nx_n) sorozat konvergens! Határozzuk meg e sorozat határértékét is!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: Az (x_n) sorozat alulról korlátos, hiszen pozitív tagú. Mivel

$$x_n - x_{n+1} = ax_n^2 > 0,$$

ezért az (x_n) monoton csökkenő. Létezik tehát határértéke, és az nyilvánvalóan nulla.

Vizsgáljuk most az (nx_n) sorozatot!

Belátjuk, hogy a sorozat monoton növekvő és felülről korlátos.

Az (x_n) tulajdonságainak felhasználásával:

$$x_n - x_{n+1} = ax_n^2 > ax_n x_{n+1},$$

azaz

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} > a \quad \text{minden természetes egész } n\text{-re.}$$

Tehát

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} \right) > (n-1)a,$$

amiből

$$\frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_1} + (n-1)a > 2a + (n-1)a = (n+1)a.$$

Vagyis

$$(n+1)x_n < \frac{1}{a} \tag{1}$$

és

$$nx_n < \frac{1}{a} - x_n < \frac{1}{a}. \tag{2}$$

A (2) következménye, hogy sorozatunk felülről korlátos. Az

$$\frac{(n+1)x_{n+1}}{nx_n} = \frac{n+1}{n}(1 - ax_n) > 1$$

akkor és csak akkor, ha

$$(n+1)(1-ax_n) > n,$$

azaz, ha

$$1-a(n+1)x_n > 0,$$

ami (1) miatt teljesül, tehát az (nx_n) sorozat monoton növekvő. Ezzel beláttuk, hogy az (nx_n) sorozat konvergens. A sorozat h határértékének kiszámításához felhasználjuk *Stolz tételét:*

Ha $\quad y_{n+1} > y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ és létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$;

akkor ez utóbbi egyenlő a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ határértékkel. Vizsgáljuk evégből:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cdot x_{n+1}}{ax_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{ax_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a}(1-ax_n) = \frac{1}{a}.$$

Az idézett tétel miatt tehát

$$h = \lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}} = \frac{1}{a}.$$

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

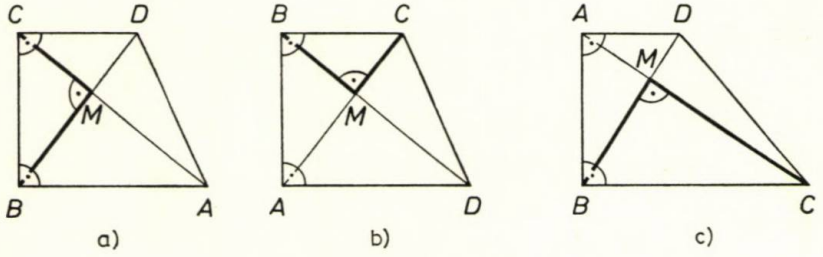
A megoldók száma: 4.

1009. Az $ABCD$ derékszögű trapéz AC és BD átlói merőlegesek egymásra, közös pontjuk az M. Szerkeszthető-e a trapéz, ha az MB és MC szakaszok adottak?

Horváth Tibor, Dunakeszi

Megoldás: Két esettel kell foglalkoznunk.

1. Ha a B és C csúcsnak legalább egyike — legyen ez a B — egy, a trapézhoz tartozó derékszög csúcsa (1. ábra).



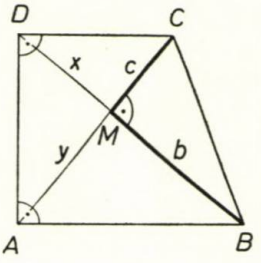
1. ábra

Ekkor a trapéz szerkeszthető. Szerkesszük meg ugyanis az MBC ($M\sphericalangle = 90°$) derékszögű háromszöget. Ennek B csúcsában állítsunk merőlegest a BC átfogóra. Ez a merőleges az MC egyenest a trapéz A csúcsában metszi. Húzzunk ezután párhuzamost a C csúcson át BA-val (1. *a)* ábra), illetve az A csúcson át BC-vel (1. *b)*, *c)* ábrák). Ez a párhuzamos egyenes az MB egyenest a trapéz D csúcsában metszi. Nyilvánvaló, hogy a fentiekkel egyetlen, a kívánt tulajdonságokkal rendelkező trapézt nyerünk.

2. Ha a trapéz derékszögű csúcsai az A és D, akkor a trapéz *nem szerkeszthető.* Alkalmazzuk ugyanis az ACD, illetve az ABD derékszögű háromszögekben a magasságtételt (2. ábra).

azaz

$$x^2 = cy \quad \text{és} \quad y^2 = bx,$$
$$x^3 = bc^2 \quad \text{és} \quad y^3 = b^2c.$$



2. ábra

Ára: 5,50 Ft INDEX: 25 565

Ha az x^3-bc^2, illetve az y^3-b^2c irreducibilis polinom a racionális számtest felett, akkor az x, illetve az y nem szerkeszthető, tehát a trapéz sem. Ilyen polinomokat nyerünk például a $b=\sqrt{n}$, $c=1$ (n négyzetmentes pozitív egész) választással.

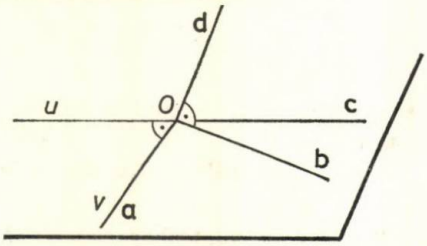
Ambrus Gabriella, Budapest

A megoldók száma: 11.

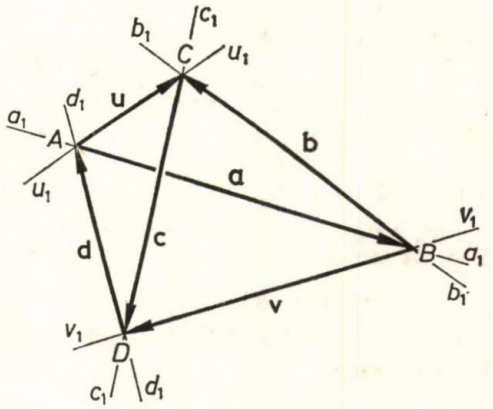
1010. A tér egy O pontján átmenő a, b, c, d egyenesekre: $a \perp c$ és $b \perp d$ teljesül. Az $[a, b]$ és $[c, d]$ síkok metszésvonalát jelölje u, az $[a, d]$ és $[b, c]$ síkok metszésvonalát pedig v! Bizonyítsuk be: $u \perp v$!

Kárteszi Ferenc, Budapest

Megoldás: Feltehető, hogy az egyenesek között nincs három egysíkú, különben vagy nincsenek u, v metszésvonalak (ekkor a négy egyenes egysíkú), vagy pedig az állítás nyilvánvaló, amint azt a 3. ábráról leolvashatjuk.



3. ábra



4. ábra

Legyen az a_1, c_1 kitérő egyenespár olyan, hogy $a_1 \| a$ és $c_1 \| c$. Jelöljük az a_1, c_1 egyeneseket összekötő, b-vel és d-vel párhuzamos egyeneseket (transzverzálisokat) b_1-gyel, illetve d_1-gyel (4. ábra). Az a_1, b_1, c_1, d_1 egyenesek az $ABCD$ torznégyszöget létesítik. Tekintsük az alábbi vektorokat:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{CD} = \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{DA} = \mathbf{d}, \quad \overrightarrow{AC} = \mathbf{u} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BD} = \mathbf{v}.$$

Minthogy $AC=u_1$ és $DB=v_1$, továbbá $u_1 \| u$ és $v_1 \| v$, azt kell bizonyítani, hogy $\mathbf{uv}=0$. Mivel

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}+\mathbf{b} \quad \text{és} \quad -\mathbf{v} = \mathbf{d}+\mathbf{a},$$

ezért

$$-\mathbf{uv} = \mathbf{ad}+\mathbf{bd}+\mathbf{aa}+\mathbf{ba} = \mathbf{a}(\mathbf{d}+\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}(-\mathbf{c}) = 0,$$

hiszen a feltételek szerint $\mathbf{bd}=\mathbf{ac}=0$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$.

Kárteszi Ferenc, Budapest

Megjegyzés: Feladatunk annak az ismert feladatnak átfogalmazása, amely szerint: ha egy tetraéder két-két kitérő élpárjában az élek merőlegesek egymásra, akkor a harmadik élpár is egymásra merőleges élekből áll.

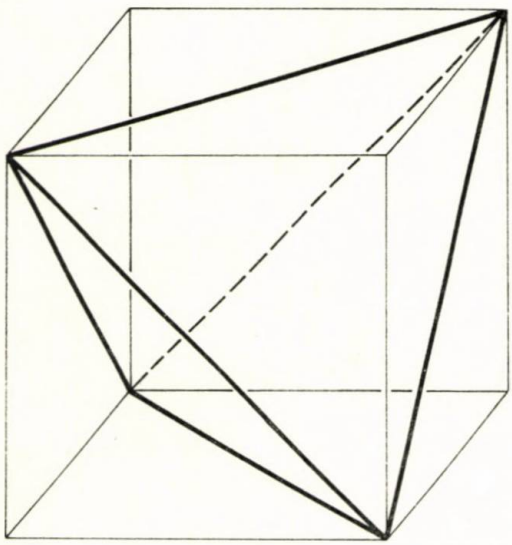
A megoldók száma: 5.

A megoldók névsora (1005—1010.)

Ambrus Gabriella, Budapest (1005., 1007., 1009.); Bagi Gábor, Barcs (1005.); Bencze Mihály, Brassó (1005., 1007—1009.); Csorba Ferenc, Győr (1005.); Földeák Árpád, Budapest (1009); Honti Dénes, Győr (1005., 1007., 1010.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (1007., 1010.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (1005., 1007—1009.); Kondor Judit, Budapest (1007., 1009.); Kun Péter, Szentendre (1005., 1009.); Magyar Ákos, Budapest (1005., 1007., 1009); Major Piroska, Budapest (1005., 1007.); Nagy Imecs Vilmos, Székelyudvarhely (1005., 1007.); Polcz Katalin, Pécs (1005., 1007., 1009., 1010.); Rischákné Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (1005., 1007.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1005., 1007.); Szánthó Gyula, Gyula (1007—1009.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1005., 1007. 2. mód, 1008., 1010.); Varga István, Nagyszalonta (1005. 2 mód, 1007.); Zalán Péterné, Budapest (1007.).

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



983. június * XXX. évfolyam 3 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:

HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

83.1769 — Szegedi Nyomda—F.v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Csánk István: A lap második felelős szerkesztője voltam 65
Dr. Varga Tamás: A függvényfogalom előkészítése I. 66
Lehel Jenő: Feladatok a kombinatorikus geometriából 76
A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára 89
Garádi János: Tájékoztató a Középiskolások 1982. évi Számítástechnikai Versenyéről I. 90

FELADATOK 92

СОДЕРЖАНИЕ

Чанк Иштван: Я был ответственным редактором нашего журнала — вторым по очереди 65
д-р Варга Тамаш: Подготовление понятия функции I 66
Лехел Енё: Задачи по комбинаторной геометрии 76
Соревнование математического Общества им. Яноша Бояи для учителей математики 89
Гаради Янош: Информация о соревновании учеников средних школ 1982 года по вычислительной технике I. ... 90

ЗАДАЧИ 92

INHALT

Csánk, István: Ich war der zweite verantwortliche Redakteur dieser Zeitschrift .. 65
Dr. Varga, Tamás: Über die Vorbereitung des Funktionsbegriffes I. 66
Lehel, Jenő: Aufgaben aus der kombinatorischen Geometrie 76
Der Wettbewerb der Bolyai János Mathematischen Gesellschaft für die Mathematiklehrer 89
Garádi, János: Bericht über den Wettbewerb der Schüler der Mittelschulen in der Rechentechnik im Jahre 1982 I. 90

AUFGABEN 92

CSÁNK ISTVÁN
ny. felelős szerkesztő
Budapest

A lap második felelős szerkesztője voltam

Folyóiratunk — A MATEMATIKA TANÍTÁSA — 1963. évfolyamának első számában megemlékezett fennállásának tízéves évfordulójáról. Az azóta eltelt 20 évi sikeres működésével immár 30. évfolyamába lépett.

A Művelődésügyi Minisztérium 1957-ben egy intézkedésével összes módszertani folyóiratának szerkesztését a Tankönyvkiadó illetékes főszerkesztőségeihez helyezte át. Ekkor kaptam megbízatást A MATEMATIKA TANÍTÁSA szerkesztésére. Örömmel vállaltam ezt a feladatot, pedig többletmunkát jelentett számomra a matematika tankönyvek szerkesztése mellett. Igaz viszont, hogy a folyóirat szerkesztéséhez ugyanaz a tájékozottság szükséges, mint a tankönyvszerkesztéshez. Ugyanis a tankönyvek kimunkálásához feltétlenül szükséges az iskolákkal való szoros kapcsolat. Ez nemcsak azt jelenti, hogy óralátogatásokat kell végezni ı különböző típusú iskolákban és azok során elbeszélgetni a szaktanárokkal a tankönyvekről, hanem ezeken túlmenően részt kell venni a szakfelügyelői értekezleteken, különféle megbeszéléseken, főleg ha azok tankönyvekkel kapcsolatosak. Nagyon előnyös, ha a tankönyvek szerkesztői ismerik legalább a szocialista országok megfelelő szaktárgyú tankönyveit, módszertani folyóiratait.

A felsoroltak lényegesen megkönnyítik egy módszertani folyóirat szerkesztőjének munkáját, de legfőbb gondja az, hogy legyen megfelelő kézirat. A folyóirat egyes számainak összeállításához fontos még szoros kapcsolat a minisztérium általános és középiskolai illetékes főelőadóival, továbbá az OPI megfelelő tanszékével.

Ismeretes, hogy A MATEMATIKA TANÍTÁSÁNAK többek között feladatrovata is van. Már csak ezért is biztosítani kell a folyóirat rendszeres megjelenését. Abban az időben különös gondot okozott a hosszú nyomdai átfutási idő. Ennek megrövidítésében az segített, hogy a tankönyvek kimunkálása során sikerült jó kapcsolatot teremtenem a nyomdákkal. A lap rendszeres megjelenésének következtében örvendetesen növekedett a feladatmegoldók száma. Például az 1963. évi 1. számban a feladatmegoldók száma 67-re növekedett, közülük 4 volt határainkon túli.

Az iskolalátogatások és értekezletek során a folyóirat szerkesztője személyes kapcsolatot létesíthet egyes olvasóival, de lényeges a levelező kapcsolat is; ennek nyoma látható az 1959. évi 5. számban a 159. oldalon.

Bővült a cikkírók névsora, ami azonnal feltűnik, ha fellapozzuk a folyóirat pl. tizedik évfolyamának egyes számait. Akadnak külföldi szerzők is, akik kifejezetten folyóiratunknak szánt cikkeket írtak. Ez részben annak tulajdonítható, hogy 1961-től kezdve az egyes számok tartalomjegyzékét orosz és német nyelven is közli a lap.

Egy módszertani folyóirat akkor tölti be jól a szerepét, ha a benne közölt cikkek olyan módszereket tesznek közzé, amelyeket alkalmazva hatékonyabbak lesznek a szaktanárok órái. Hiszen ma már nem elégedhetünk meg azzal, hogy csak a tehetséges tanulók sajátítsák el a szükséges alapismereteket, hanem arra kell törekednünk, hogy lehetőség szerint minden tanulóval elérjük ezt a célt. Ez többek között úgy valósítható meg, ha a tanítás módszere csökkenti a tananyag elvontságát, és ezzel lehetővé teszi, hogy az ún. hátrányos helyzetben levő tanulók is megbirkózhassanak a tananyaggal.

A folyóiratnak arra is tekintettel kell lennie, hogy a tananyag átadásán túl a matematika kiválóan alkalmas a logikus gondolkodásra nevelésre, ezért szükséges, hogy olyan cikkeket is közöljön, amelyek sugalmazzák a tanárok ilyen irányú tevékenységét.

A matematika tanítása nem problémamentes. Ismerjük saját problémáinkat és megoldásokat keresünk azokra. Határainkon túl is megvannak ezek a problémák, ott is keresnek és találnak azokra megoldást, gyakran a mienktől eltérőt. Ezért hasznos, ha a folyóirat kitekintést tud nyújtani a szaktanárok számára határainkon túlra. Folyóiratunkban is találhatók ismertetések külföldi (szovjet, német, csehszlovák stb.) folyóiratokból. Előfordult azonban, hogy a szerkesztőnek nem volt ideje arra, hogy felkérjen valakit egy érdekes és időszerű cikk ismertetésére vagy lefordítására; ekkor maga végezte el ezt a munkát. Ilyen esetekben a cikk név nélkül, esetleg "-k -n" jelzéssel jelent meg.

Folyóiratunkban a módszertani közleményeken és a feladatrovaton kívül még a következő rovatok találhatók: „Tantervek — tankönyvek", „Könyvek, folyóiratok, szemléltető eszközök" és „Hírek". Természetesen nem minden számban szerepelnek ezek a rovatok, de ha valaki kézbe veszi a folyóirat akkori számait, láthatja hogy egy ízben részleteket közöltünk készülő tankönyvekből. Az is olvasható, hogy erre a közleményünkre számos hozzászólás (bírálat, megjegyzés) érkezett.

Az említett rovatokban jelentek meg megemlékezések nevezetes évfordulókról, hírek jelentős matematikai eseményekről, pl. nemzetközi matematikai diákolimpiákról stb. Ezeken kívül megjelentek könyvismertetések, szemléltető eszközök leírásai stb.

A folyóirat mostani 30 éves évfordulója alkalmából meg kellene szólaltatni azokat a tanárokat, akik kezdettől fogva olvasói voltak a lapnak — ezek többsége már nyugdíjas vagy igen közel van a nyugdíjas korhoz. Ők elmondhatnák, hogy miben segítette a lap tanári munkájukat. Az ilyen megnyilatkozásokból ahhoz is támpontokat lehetne kapni, hogy milyen irányban haladjon tovább a folyóirat.

Felvetődik az a kérdés, vajon az új tanári generáció meríthetne-e valami hasznosat a lap régebbi cikkeiből. Ha pedig a lap régebbi számai nincsenek meg az iskolák — különösen az újabban létesült iskolák — könyvtáraiban, akkor talán célszerű lenne összegyűjteni egy könyvben azokat a régebbi számokban megjelent cikkeket, amelyek még ma is időszerűek.

Ez lenne legszebb megünneplése a folyóirat 30. évfordulójának.

A matematikatanítás módszere

DR. VARGA TAMÁS
főmunkatárs
Országos Pedagógiai Intézet

A függvényfogalom előkészítése* I.

Vázlat:

1. Mit értünk függvényen? Mi az a függvényfogalom, amelyet elő akarunk készíteni?
2. Függvényfogalom vagy függvényfogalmak? Mit akarunk elérni az előkészítésükkel?
3. A függvényfogalmak előkészítése a matematikai fogalmak rendszerében.
4. A függvényfogalmak előkészítése a tanulók értelmi fejlődésének részeként.
5. Hogyan folyik iskoláink alsó osztályaiban a függvényfogalmak előkészítése?

*Előadás az iskolai matematikaoktatás időszerű problémáiról szóló nemzetközi szimpózion keretében.
(1983. szeptember 26—október 1.).

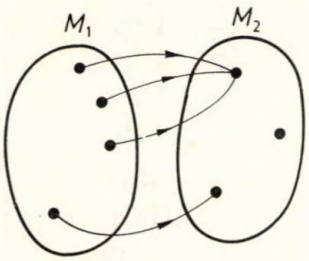
1. A függvényfogalmat akarjuk előkészíteni, majd kialakítani. De mit értünk függvényen? A szóhasználat nem egységes. Matematikusok vagyunk, tudjuk, hogy a definíciókról szóló viták nagy része üres szócséplés. Mihelyt tisztázzuk, milyen értelemben használunk egy szót — például éppen a függvény szót —, meg tudjuk értetni magunkat azokkal is, akik más szóhasználathoz vannak szokva. Erre a tisztázásra azonban szükség van. Tartozom annak a megindokolásával is, hogy a többféle változat közül miért kötünk ki az egyik és nem egy másik mellett. Ugyanakkor megértem és respektálom, ha mások — kollégáink, barátaink — más terminológiát részesítenek előnyben, talán más szempontoktól vezérelve.

Szinte csak találomra említek két könyvet, amelyben megtalálható a tantervünkben alapul vett terminológia:

K. A. Hirsch: Kleine Enzyklopädie der Mathematik,
VEB Bibliographisches Institut, Leipzig.

V. M. Bragyisz: Metogyika prepodavanyija matyematyiki v szrednyej skole,
Ucspedgiz, Moszkva.

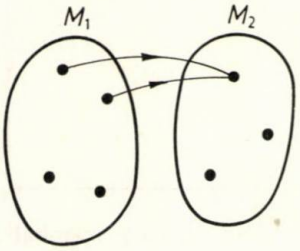
Arról a nagyon általános függvényfogalomról van szó, amelyet röviden így jellemezhetünk: egy M_1 halmaz*ról* egy M_2 halmaz*ba* való egyértelmű leképzés. Engedjék el a két halmaz Descartes-szorzatának részhalmazával való (pedagógiai szempontból egyébként sem előnyös) fogalmazást, ehelyett egy ábrával és egy táblázattal egészítem ki a fenti tömör leírást.



	Lehet olyan eleme, amelyhez nyíl tartozik		
	0	1	>1
M_1	—	+	—
M_2	+	+	+

A — jelek jelentése a táblázatban: nem, nem lehet; a + jeleké: igen, lehet (ti. mondott tulajdonságú eleme az M_1, illetve M_2 halmaznak.)

A fenti értelemben a „függvény" szó a francia applicationnal szinonim. Szokás néha olyan módon különböztetni meg a két fogalmat, hogy az M_1 halmazra vonatkozóan csak a nyilak unicitását kötjük ki, egzisztenciáját nem:



	Lehet olyan eleme, amelyhez nyíl tartozik		
	0	1	>1
M_1	+	+	—
M_2	+	+	+

Ilyen értelemben beszélhetünk például

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

függvényről is, nem kell az értelmezési tartományt a definícióban pontosan megadnunk pl. így:

$$\mathbf{R} \setminus 0 \to \mathbf{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x},$$

ami ugyan itt könnyű, de ha a nevezőben bonyolultabb kifejezés, például x helyett egy ötödfokú polinom van, akkor már nehézkesebb. Ebbe a vitába nem megyünk bele; egyébként a függvényfogalom előkészítése idején az alapul vett halmazok precizirozását nem is tartjuk mindig szükségesnek.

Egy másik, szintén nagyon elterjedt definíció az elsőnél annyiban szűkebb, hogy kikötjük:

M_2 csak *számok* halmaza lehet,

M_1 pedig számoké, számpároké általában *szám n-eseké*, és eszerint beszélünk egy-, két-, általában *n-változós* függvényekről.

A zsebszámológépek — a programozhatók is — többnyire ilyen függvényeket állítanak elő; lásd például az alábbi táblázatot:

Számológépekkel előállítható függvények (többek közt)

Egyváltozósak (input: x)	Kétváltozósak (input: x és y)	Többváltozósak (input: x_i, $i=1; \ldots; n$)
$-x$	$x+y$	$\sum_{i=1}^{n} x_i$
$\frac{1}{x}$	$x-y$	$\prod_{i=1}^{n} x_i$
x^2	xy	$\frac{\sum x_i}{n}$, $\sqrt[n]{\prod x_i}$
$\sqrt{x}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$, $\sqrt{\sum x_i^2}$
$\lvert x\rvert$	x^y	$(x_1; \ldots; x_n)$ (lnko.)
$[x]$, ENT x	$\sqrt[y]{x}$	$[x_1; \ldots; x_n]$ (lkkt.)
$\{x\}$ FRAC x	$\frac{x+y}{2}$	max $(x_1; \ldots; x_n)$
sin x	$\sqrt{xy}$	min $(x_1; \ldots; x_n)$
cos x	$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$	med $(x_1; \ldots; x_n)$ (medián)
tan x	$\sqrt{x^2+y^2}$	mod $(x_1; \ldots; x_n)$ (modusz)
arc sin x	$(x; y)$	
arc cos x	$[x; y]$	
arc tan x	max $(x; y)$	
e^x	min $(x; y)$	
ln x	x kerekítése y tizedesjegyre vagy y értékes jegyre	
10^x		
lg x		
átszámítások (radián, fok, újfok; 10-es számrendszerből 8-asba vagy 60-asba és vissza)		

Előállíthatók azonban zsebszámológépekkel valamivel általánosabb értelemben vett függvények is, amelyekben például M_2 elemei nem számok, hanem számpárok vagy számhármasok (példa erre: derékszögű koordinátáival megadott vektor átalakítása polárkoordinátás alakba vagy viszont); vagy számhalmazok (például természetes számokhoz osztóik halmazát rendeljük) vagy M_1 és M_2 elemei is mátrixok.

A felsorolt függvények mind valamilyen *numerikus* információhoz rendelnek ugyancsak *numerikus* információt. A szá-

mológépek (kalkulátorok) és a számítógépek (komputerek) közt a határvonal ma már elmosódóban van, de leginkább talán ezzel különböztetjük meg őket: a kalkulátorok inputja és outputja numerikus, a komputerek viszont perifériáiktól függően elvben bármilyen típusú információ feldolgozására alkalmasak: bemenő és kijövő adataik egyaránt lehetnek számok, szövegek, ábrák, fizikai mennyiségek stb.

Azzal, hogy a függvény tágabb és szűkebb fogalmát kapcsolatba hoztam a komputerekkel, illetve kalkulátorokkal, bizonyos mértékig már anticipáltam azt, amire fejtegetéseimben később részletesebben is kitérek, a függvényfogalom előkészítésének hogyanját. Didaktikailag célszerű, szemléletes analógiáról van itt csupán szó, nem pedig a kiszámítható függvényeknek Turing-gépekkel (minden számítógép absztrakt modelljével) való előállíthatóságáról. Ennek az analógiának a szempontjából közömbös, hogy a gép előállítja-e a függvényt — kiszámítja-e az értékeit — vagy csupán előhív és kijelez valamilyen utasítás nyomán bizonyos tárolt adatokat. Hogy folytassam az anticipálást: a tanulók bizonyos adatait tárolhatja a gép — anyja neve, születési helye, ideje, lakcíme, testmagassága stb. — és a név betáplálására előhívhatja ezeket. Ennek persze semmi köze sincs kiszámíthatósághoz, Turing-géphez. Ahhoz sincs köze, hogy milyen program alapján rendeli hozzá a gép a bemenő adatokhoz a kijövőket. A gépet ebből a szempontból fekete doboznak tekintjük. A hozzárendelés *ténye* a fontos, nem a *módja*. Ilyen és csak ilyen értelemben fogadhatjuk el a számítógépeket az általános értelemben vett függvények metaforáiként, a kalkulátorokat pedig a numerikus értelemben vett függvények metaforáiként. Ha még meggondoljuk, hogy a zsebszámológépek tömeges (az óráéhoz hasonló mértékű) elterjedését a jelek szerint egykét évtizedes fáziskéséssel követi a számítógépek tömeges elterjedése is, akkor erős érveket találtunk az ennek megfelelő általánosságú függvényfogalom mellett, bárhogyan nevezzük is azt.

2. Mit akarunk elérni egy fogalom — esetünkben a függvényfogalom — kialakításával?

Azt, hogy a tanulók a fogalmat definiálni — más fogalmakra visszavezetni — tudják (vagy ha alapfogalom egy bizonyos matematikai rendszerben, akkor ki tudják fejteni más fogalmakkal való kapcsolataikat)? Esetleg ezt is el szeretnénk érni, de ez szinte csak ünnepélyes záróaktusa egy fogalom kialakításának.

Vagy inkább azt, hogy a tanulók konkrét esetekben el tudják dönteni, függvénye valami vagy nem? Ez is céljaink közé tartozhat, de aligha ez a legfőbb célunk.

Felbonthatjuk teendőinket és a *függvény* általános fogalma helyett (előtt? után?) függvények egész sorával kapcsolatban tűzhetjük ki az említett célokat: *ismerjenek rá,* hogy például lineáris, másodfokú, exponenciális stb. függvénnyel van-e dolguk, és esetleg definiálni is tudják ezeket a függvényeket. Ilyen értelemben nem is *a függvényfogalom,* ha nem *függvényfogalmak* kialakítását tekinthetjük feladatunknak.

Tovább is mehetünk: az, hogy lineáris függvény, gyűjtőfogalom, függvények egy halmaza tartozik ide. Más gyűjtőfogalmak: szakaszonként lineáris, monoton növekvő, monoton csökkenő, szigorúan monoton stb. Azt akarjuk, hogy ezekre is ráismerjenek a tanulók.

3. Mit jelent *ráismerni* egy függvényre? Felismerni formula alapján? (Pl. $c=\frac{10^6-d}{3}$-ban meglátni az $y=ax+b$ alakot). Felismerni értéktáblázat, grafikon alapján? Jelenti mindezt, de ennél sokkal többet is. A „sokkal több" főként a matematikán kívüli alkalmazásokat foglalja magában. A tanuló akkor rendelkezik a lineáris (kvadratikus, exponenciális stb.) függvény alkalmazásra kész fogalmával, ha nemcsak formula,

táblázat vagy grafikon alakjában ismeri fel az ilyen függvényeket, hanem a legkülönfélébb *szituációkban* is. Például tisztában van azzal, hogy az olyan látszólag nagyon különböző szituációkban, mint „nekem 2-vel több van, mint neked", „nekem 3-mal kevesebb van, mint neked", „nekem 5-ször annyi van", „kettőnknek együtt 10 van", „az enyémnek a fele hússzal kevesebb, mint a tied kétszerese" stb., van valami közös: ezek mind lineáris kapcsolatok.

Természetes, hogy az olyan fogalmak kialakításakor sem elégedhetünk meg a matematikán belüli ráismeréssel, mint például monoton (vagy szigorúan monoton) növekvő (vagy csökkenő).

Azért említem éppen ezeket a példákat, mert bőséges tapasztalatom van arra vonatkozóan, hogy ezek az egyszerű és alapvetően fontos fogalmak művelt embereknek is mennyire hiányoznak nemcsak a szókincséből, hanem az operatív fogalomrendszeréből is. Arra gondolok, hogy például nem világos előttük a különbség *szigorúan monoton csökkenő* függvény és *fordított arányosság* közt: az utóbbiról beszélnek, de vagy az előbbire gondolnak, vagy — még inkább — maguk előtt sem világos, hogy voltaképpen mire gondolnak.

A vázlatban feltett kérdések közül a **2.**-ra és részben a **3.**-ra a fentiek alapján így adom meg a választ: a függvényfogalom (helyesebben *fogalmak*) kialakításával elsőrendű célunk a tanulók *intuíciójának fejlesztése*. Az intuitive megragadott fogalomra ráépülhet minden egyéb: matematikai formanyelv, definíció, tételek, feladatmegoldási módszerek. Ha azonban ez hiányzik, akkor az az idő és energia, amit az utóbb felsoroltak elsajátíttatására fordítunk, nagy részben kárbavész. Az intuitív fogalom jellemzője, hogy szervesen beépül a tanulók teljes fogalomrendszerébe — tehát nemcsak matematikai fogalmainak rendszerébe! — és ezért operatív.

Bár egy matematikai fogalom operativitása elsősorban matematikán kívüli alkalmazhatóságában nyilvánul meg, térjünk vissza mégis ahhoz a kérdéshez, hogyan kapcsolódik az általunk kialakítandó fogalom egyéb matematikai fogalmakhoz, témákhoz.

Minden erőfeszítésünk ellenére nem alaptalanok az iskolát ért olyan kifogások, hogy *tantárgyakra tördelt* tudást, sőt a tantárgyakon belül is *darabokra széteső tudást* közvetít. Ilyen veszéllyel a matematikaoktatásban is szembe kell néznünk. Ezt a veszélyt csökkenti *olyan fogalmak* kialakítása, amelyek integráló jellegűek, átszövik az egész matematikát — és ezeknek a fogalmaknak *olyan módon való* kialakítása, hogy ez az integráló jelleg érvényesülhessen, vagyis a tanulók előtt feltáruljanak az eltérő megjelenés mögött a közös vagy rokon gondolatok. A függvényfogalom erre kiválóan alkalmas. Különösen igaz ez akkor, ha nem szorítkozunk a numerikus függvényfogalomra. Három példát említek:

a) Sorozatok mint függvények. Egyaránt gondolhatunk számok, alakzatok, bármilyen matematikai vagy nem matematikai objektumok sorozatára; ha van egy első, egy második stb. elemük, akkor pusztán ez a rendezés megfelelteti az elemeket az 1, 2, ... számoknak — a pozitív egész számoknak, (vagy 0 indexszel kezdve, a 0, 1, 2, ... természetes számoknak — terminológiai vitába itt sem kívánok bocsátkozni).

Megint anticipálok, a hogyanról beszélek: könnyebben elvezethetjük a tanulókat arra a belátásra, hogy a sorozatokat függvényekként kezelhetjük, ha eleinte önállóan lépnek fel.

b) Geometriai transzformációk mint függvények. Vegyük példaként a legegyszerűbbeket, az egybevágósági transzformációkat. Közülük az irányítástartók szemléletesen mozgatással valósíthatók meg — a síkbeli egybevágósági transzformációk akkor is, ha nem irányítástartók (igaz, akkor térbeli mozgatással). A mozgatásos megvalósítás azonban félreértéseknek is lehet forrása. Ugyan mi-

ért mondjuk egy eltolásra és az inverzére, hogy együttes eredményük a 0-eltolás? Három és egy negyed fordulatot miért nem különböztetünk meg egyetlen negyedfordulattól vagy ellenkező irányú háromnegyed-fordulattól? Mindennapos tapasztalataink szerint ezek nagyon is különböznek egymástól. A transzformáció-szemlélet kialakítását segíti az, ha a tanulók megértették másféle függvények kapcsán azt, amit a számítógép-analógia említésekor hangsúlyoztam: hogy nem törődünk azzal, mi történik a bemenő információval, *milyen módon adódik* belőle a kijövő információ, csak azzal törődünk, hogy *minek mi felel meg.* Ilyen értelemben a 46-tal való szorzás és a 23-mal való osztás egymásutánja pontosan ugyanazt a függvényt valósítja meg, mint a 2-vel való szorzás, ha bonyolult módon is. Aki ezt a gondolatot algebrai köntösbe öltöztetve megértette, az geometriai összefüggésben is könnyebben megérti — vagy megfordítva.

c) Logikai függvények. Az olyan univerzális információfeldolgozó gépek, amilyeneknek a tanulók a függvényeket látják, arra is programozva lehetnek, hogy egy-egy betáplált mondatról eldöntsék, igaz-e a mondat vagy téves — vagy pedig sem nem igaz, sem nem téves, például ha kérdőmondatról vagy felszólító mondatról van szó. Lehetséges, hogy több bedobott mondat csak abban különbözik, hogy ugyanazon a helyen más-más szám szerepel benne, például „az 5 prímszám", „a 6 prímszám", általánosan: „az x prímszám"; vagy „1-nek az 5-szöröse 6-tal nagyobb, mint 1-nek a négyzete"; „2-nek az 5-szöröse, 6-tal nagyobb, mint 2-nek a négyzete"; ..., általánosan: $5x=x^2+6$. Ezek az *egyváltozós logikai függvények* speciális esetként magukba foglalják az egyismeretlenes egyenleteket (egyenlőtlenségeket stb.). Alaphalmazuknak az a része, ahol igazak, a függvény igazsághalmaza. A *kétváltozós logikai függvények* vagyis a binér relációk hasonló módon választják ki egy alaphalmazból (változóik alaphalmazának Descartes-szorzatából) igazsághalmazukat. A binér relációk ilyen értelemben speciális függvények (logikai függvények); ez nem kevésbé fontos összefüggés, mint az, amit inkább szoktak hangsúlyozni, hogy ti. a függvények a binér relációk speciális eseteinek tekinthetők.

Hozhatnék még példákat a matematika más ágaiból — például a kombinatorikából és a valószínűségszámításból is — annak érzékeltetésére, hogy a függvények valóban mindent átható módon vannak jelen a matematikában. Nem kell megtennem, már csak azért sem, mert tudom, hogy más előadók bővebben is kitérnek ezekre a matematikán belüli kapcsolatokra. Saját témám szempontjából azt kívánom hangsúlyozni, hogy olyan összefüggésekről van szó, amelyeket nemcsak a függvényfogalom rendszeres tárgyalásakor lehet — és véleményem szerint érdemes is — megvilágítani, hanem a függvényfogalom előkészítése idején, a legalacsonyabb szinten, azt mondhatnám: *kezdettől fogva.*

4. Ezzel máris vázlatom **4.** pontjához értem. Erről nem is szándékozom hosszan beszélni, hiszen nem választható el az **5.** ponttól, annak bemutatásától, mit jelenthet a függvényfogalom ilyen értelmű előkészítése valóságos iskolai szituációban, példaanyag, eszközök, módszerek tekintetében. Csupán a témák korai kezdésének, az egységes matematika egészben való elkezdésének elvi alapjáról szólok.

Abból indulok ki, amit nem szeretünk nagydobra verni, de amit egymásközt azért el kell ismernünk, mert csak így tudunk változtatni rajta: hogy a *matematika tanítására fordított idő* a tanulók jelentékeny részénél *igen csekély hatásfokú.*

Franciaországban nagy port vertek fel azok a széles körű vizsgálatok, amelyeket „Hány éves a kapitány?" címszó alatt foglalhatok össze. Egy jellegzetes kérdés, amelyet 6—12 éves tanulók százainak tettek fel: egy hajón 17 kecskét és 22

tehenet szállítottak. Hány éves volt a hajóskapitány? A megkérdezetteknek mindenütt jelentős százaléka válaszolta azt: 39 éves. Ugyanezek a tanulók a példatárakban szereplő számtani feladatokat átlagos eredménnyel, esetleg az átlagnál is jobb eredménnyel oldották meg. A vizsgálat végzői azt akarták igazolni — és ez sikerült is nekik —, hogy az eredmények rendszerint *látszateredmények*. A tanulók formális ismertetőjelek alapján többnyire csak „megsaccolják", megtippelik, hogy a feladatban szereplő számokkal milyen művelet jöhet szóba, és azt gyorsan elvégzik. Itt összeadás jöhetett szóba. Figyelmüket annyira leköti a számítás *technikai* része (az, hogy minél előbb valamilyen számszerű eredményhez jussanak), hogy a szituáció *átgondolására* — például arra, hogy van-e köze a kérdésnek az adatokhoz — nem jut idejük, energiájuk. De ez általában nem is hiányzik: *feladatmegoldó stratégiájuk többnyire enélkül is beválik.*

Feladatmegoldó stratégiájuk *iskolai tapasztalataik* nyomán alakult ki bennük. Tanítóik annakidején hasonló iskolai tapasztalatokban részesültek, és ez saját feladatmegoldó stratégiáikra és pedagógiai stratégiáikra is kihat.

Egy pedagógus továbbképző előadáson az előadó ismertette a „Hány éves a kapitány?" vizsgálat eredményét. A tanárok hitetlenkedtek: egy-két kivételesen gyenge tanuló talán ad ilyen válaszokat, de a diákok — az *ő diákjaik* — többségéről ez elképzelhetetlen.

Mivel a továbbképzésen a diákok nem voltak jelen, az előadó a hallgatók meggyőzése érdekében a következőt javasolta: állítsanak össze együtt egy feladatsorozatot azoknak a tanároknak a számára, akiknek ugyanakkor a szomszédos teremben folyt a továbbképzése, olyan feladatokkal, amelyek a *tanárok nívóján* megfelelnek a 6—12 éves diákoknak feltett „hány éves a kapitány?" típusú kérdéseknek. A feladatsorozat megtalálható a Bulletin de l'Association des Professeurs des Mathématiques legutóbbi számában. Csak egyet idézek, amely ennek a szimpozionnak a témájába vág:

Jelölje meg az alábbi állítások közül azokat, amelyek igazak: az ε szám

a) minden számnál nagyobb,
b) végtelen kicsi,
c) pozitív,
d) minden számnál kisebb,
e) 0-hoz bármilyen közel lehet, de nem lehet 0.

Az eredmény megdöbbentő volt: a tanárok reagálása saját „kapitány-típusú" példáikra lényegében nem különbözött diákjaik reagálásától.

Felteszem a kérdést: a franciaországi matematikaoktatás hiányosságaira világít-e rá ez a történet, vagy általánosabb érvénye és tanulságai vannak?

A magam részéről hajlok arra, hogy azt mondjam: a történet a mi országaink szempontjából sincs híján tanulságoknak. A matematikaoktatás az egész világon túlnyomórészt S—R (stimulus-response, inger—válasz) típusú tanulást feltételez és segít. Ez a szabály, csekélyszámú a kivétel. Jórészt ebbe az irányba hatnak a tantervek a vizsgarendszerek, az oktatás és a pedagógusképzés hagyományai. Ez alól tanárok és diákok egyaránt igen nehezen tudják kivonni magukat, bár kétségtelenül vannak erre is példák. Túl messze vinne a témámtól, ha az okokat boncolni kezdeném, hiszen ez nem a függvényfogalom előkészítésének kérdése már, hanem egy sokkal általánosabb kérdés: milyen mértékig alkalmas és mennyiben nem alkalmas az inger—válasz típusú tanulás, — amelyre a hagyományos oktatás a leginkább épít, és amely az ismeretszerzés számos területén eredményes is, — matematikai ismeretek elsajátítására, matematikai fogalmak kialakítására, matematikai képességek fejlesztésére.

Ami ebből témámmal szorosan összefügg, az a következő: a *függvényfogalom csírái* a gyermeki gondolkodásban ugyanúgy megjelennek már iskoláskor előtt, mint például a számmal, a térrel vagy a

véletlennel kapcsolatos gondolatcsírák, és az oktatás fő feladata, eredményességének kulcsa nagy mértékben az, hogy segítse a tanulókat a *saját* gondolatcsíráik kibontására, továbbfejlesztésére. A *fejlesztésközéppontú* matematikaoktatásban ezért nem is úgy merül fel a kérdés, hogy a függvényfogalom előkészítése melyik életkorban, milyen osztályokban történjék, hanem úgy, hogy melyik életkorban, milyen osztályokban *milyen módon* folyjék. (Csak zárójelben jegyzem meg, hogy nem az a lényeges, milyen tantervi címszó alatt folyik a függvényfogalom előkészítése. Abból, hogy a tantervben explicite szerepel vagy nem szerepel a „függvény" címszó, nem következik, hogy valamilyen módon mégis folyik-e vagy nem folyik ennek a fontos fogalomnak az előkészítése az életkornak megfelelő szinten.)

5. Témámnak ezt a legfontosabb pontját két iskoláskor előtti példával kezdem. Mindkettő Eszter nevű ötéves unokámmal kapcsolatos, akit már kezdenek érdekelni a számok, bár sem a szülei, sem a nagyszülei, sem mások (pl. óvónők) nem ösztönzik őt erre különösebben. A két példa, amelyet elmondok, szintén számokkal kapcsolatos, de Önök fel fogják ismerni benne a függvényfogalom kezdeményeinek megjelenését is.

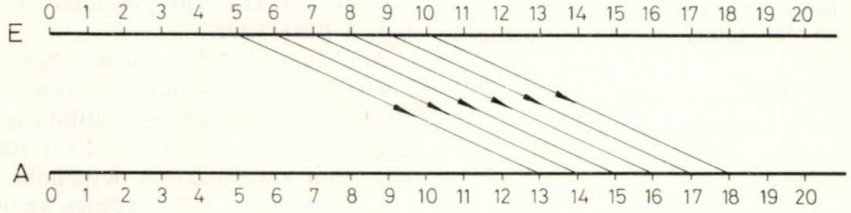
Eszter — mint annyi más öt-hat éves gyerek — megtanulta és szereti mondogatni a számokat 1-től elég sokáig; egy kis segítséggel százig, százon fölül is. Érdeklik a számokkal kifejezhető dolgok, például az életkorok. Tudja, hogy ő most volt 5 éves, unokatestvére, Andi pedig 13 éves. Ebből kiindulva elkezdte mondogatni, hogy jövőre ő 6 éves lesz, Andi akkor 14 éves, azután ő 7, Andi 15, amikor ő 8, akkor Andi 16 — így eljutott minden kérdezés és segítség nélkül odáig, hogy amikor ő 10 éves lesz, akkor Andi 18 éves lesz. Itt elunta, megállt. Megalkotta életének talán első függvénytáblázatát, amelyet mi így tennénk át írásba:

Amikor Eszter	5	6	7	8	9	10 éves
akkor Andi	13	14	15	16	17	18 éves,

és például így sűrítenénk formulába:

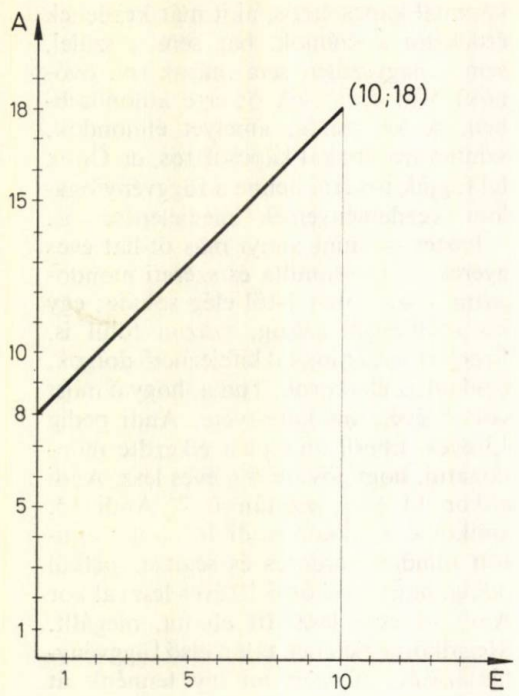
$$A = E+8,$$

és így ábrázolnánk:



vagy így (ábra a következő oldalon):

Esztertől távol vannak, nem életkorához mértek a függvénynek ezek a megjelenési formái. Már csak azért sem, mert például *nem tud összeadni.* A 8 hozzáadása a saját életkorához képességeit messze meghaladná. Nem is 8 hozzáadásával számítja ki a saját mindenkori életkorából az Andiét, hanem az egyetlen birtokában levő számolási technikát alkalmazza, a *továbbszámlálást,* pontosabban annak egy fejlettebb változatát, amit *párhuzamos továbbszámlálásnak* nevezhetnék. (Már ismerkedik egy másik technikával, a visszafelé számlálással, de arra



itt nincs szüksége.) A fentiek közül a táblázatos forma volna talán a legközelebb hozzá, ha tudna akár szöveget, akár számokat stabilan írni és olvasni — de nem tud, éppen csak kezd. Marad a függvény *verbális, szóbeli megjelenési* formája. Ezt példánkban az

amikor ..., akkor ...

szókapcsolat fejezi ki, de kifejezhetik például a

ha ..., akkor ...
amelyik ..., az ...
ez ..., az ...
én ..., te ...
nálam ..., nálad ...
nem ..., hanem ...

szókapcsolatok, sok más, nem numerikus változatban is.

Most térek rá második példámra, amely szintén Eszterrel és a párhuzamos továbbszámlálással kapcsolatos. Eszternek és kisöccsének a szobájában van egy bordásfal. Eszter szeret mellette kézenállni. Röviddel az előző eset (életkorokra vonatkozó számításai) után Eszter megfigyelte, melyik rúdig ér föl a lába kézenálláskor. Megszámolta, hogy alulról a hetedik rúdig. (Egyúttal azt is megállapította, hogy a bordásfalnak összesen 14 foka van.) Jelen voltam, előttem számolgatta, nekem újságolta megfigyelését. Előzőleg hallottam szüleitől Eszternek a saját és Andi életkorára vonatkozó számításairól, és ennyit mondtam: „5 éves vagy és a hetedik rúdig ér a lábad". Eszternek is ugyanaz járhatott a fejében, mert folytatta: „Amikor 6 éves leszek, akkor a nyolcadik rúdig fog érni, amikor 7 éves leszek, akkor a kilencedikig..." — egy idő után elnevette magát, a 14. fok körül sejthette már, hogy nem ilyen egyszerű a dolog. „Én pedig most 62 éves vagyok" — mondtam ekkor és a 64. fokig ér föl a lábam". Ennyiben maradtunk. Eszter nem számolt utána — mint mondtam, nem tud összeadni, talán még a 2-vel továbbszámlálást sem ismerte fel abban, hogy én a 62-vel a 64-et párosítottam. Arról sincs sok sejtelme, hogy mekkora szám is az a 62 vagy a 64, de annyi mégis van, hogy felismerje a helyzet abszurditását.

Mi játszódhatott le tehát Eszter fejében?

a) Először is adva volt egy (feltehetően csecsemőkorban, anyjával való kapcsolatában gyökeredző, a beszélni tanulással együtt érlelődő) gondolkodási forma, a párképzés.

b) Azután megtanulta az „egy-kettő-három" kezdetű mondókát, és ennek felhasználásával kezdte elsajátítani azt az alapvetően fontos matematikai technikát, amit számlálásnak nevezünk.

c) Ennek és a párképzésnek az összekapcsolása révén kialakította a páros továbbszámlálás technikáját.

d) Ez a technika képessé tette egy olyan *matematikai modell* szóbeli megalkotására, amelyet írásban például így fejezhetünk ki:

x	5	6	7	8	9	10
y	13	14	15	16	17	18

képletben így:

$$y = x+8 \quad \text{vagy} \quad x \mapsto x+8.$$

e) Ezt a matematikai modellt először olyan szituációban alkalmazta, amelyre az jól illeszkedik. (Az életkor-különbség két személy között gyakorlatilag állandó; a relativitáselméletből következik ugyan, hogy lehet eltérés, de ez tapasztalati világunkban elhanyagolhatóan kicsi.)

f) Az elsajátított technikát (sugalmazásomra!) megpróbálta áttenni egy másik szituációra. Ez olyan matematikai modellhez vezetett, amely az (5; 13) számpár helyett az (5; 7) számpárral kezdődött; a technika alkalmazása szempontjából ez nem ütközött nehézségbe.

g) A matematikai modellt azután visszavetítette a szituációra: elképzelte a párhuzamos továbbszámlálással kapott további számpárokat, és *kezdett* felderengeni előtte, hogy valami nincs rendben.

Eszter tehát a kialakított modellt olyan összefüggésben is alkalmazni próbálta, amelyre az nem jól illeszkedett. Szeretném felhívni a figyelmet ennek a *sikertelen, hibás* alkalmazásnak a rendkívüli fontosságára, fejlesztő, nevelő értékére. A széles értelemben vett tanulás lényegéhez tartozik, hogy amit tanultunk — motorosan, verbálisan, gondolkodási modellként, bárhogy — azt alkalmazni is igyekszünk, és eközben, ennek révén is, felderítjük alkalmazhatóságának korlátait. Egyaránt fontos annak a felismerése, hogy a páros továbbszámlálás technikája és az ennek révén kialakított $x \mapsto x+n$ alakú függvény *alkalmazható* az „amikor én ..., akkor ő ..." fajtájú életkoros feladatokra (az élettartam megszabta korlátokon belül, amit szintén fel kell idővel ismernie Eszternek és az Esztereknek), és az, hogy sok más esetben viszont *nem alkalmazható,* vagy csak szinte véletlenül, kivételesen, nem szükségszerűen alkalmazható. Az utóbbiakhoz tartoznak az „amikor és ennyi éves vagyok, akkor eddig érek fel" feladatok: Eszter testmagassága nem növekszik évről évre egy-egy bordásfalfoknyival, és általában nem is egyenletesen növekszik.

Eszter matematikai gondolkozásának a fejlődése jó úton van: várható, hogy az ezután elsajátítandó technikákat és a segítségükkel kialakítandó matematikai modelleket is megpróbálja majd különféle szituációkra alkalmazni, és alkalmazhatóságukról elgondolkozni. Ez már egy *meta-technika,* ha ugyan szabad rá a technika szót alkalmazni.

A „kapitány-feladatok" egyik tanulsága az, hogy *a matematikai modellek alkalmazhatóságának a vizsgálata az iskolában — úgy látszik — háttérbe szorul.* A tanulók jelentékeny része olyan feladatmegoldási stratégiákat alakít ki — nyilván nem az iskolától függetlenül, sőt feltehetően *éppen az iskola hatására* — amelyekben a műveletek technikai részére fordított erőfeszítése mellett alárendelt szerepet játszik az adott szituációhoz illő matematikai modell kiválasztása. Így például nem sokat törődnek annak az eldöntésével, hogy a feltett kérdés milyen kapcsolatban van, van-e bármilyen kapcsolatban is a közölt adatokkal.

Az Eszter-történetek elmondásában természetesen az is vezérelt, hogy szívemhez közelálló személyről van szó. Úgy gondolom azonban, hogy ezen a szubjektív motívumon túl objektív tanulságokat is le lehet szűrni belőlük. Hadd utaljak vissza arra, amit az előző pont végén mondtam: hogy az iskolai oktatás eredményességének kulcskérdése, mennyire tudja *felismerni és tovább érlelni azokat a gondolatcsírákat, amelyek a gyermekekben már az iskoláskor előtt megjelentek.* Egyebek közt a függvényfogalom kezdeményeit is. A két történet talán segített megvilágítani, milyen gondolatcsírákra, kezdeményekre utaltam.

LEHEL JENŐ
tudományos munkatárs
MTA SZTAKI
Gráf- és hálózatelméleti csoport

Feladatok a kombinatorikus geometriából

Neves matematikusok szerint a 20. sz. elemi geometriája a kombinatorikus geometria, mely kiválóan alkalmas a matematika tanításának felfrissítésére. A kombinatorikus geometriai témák szemléletessége, újszerűsége, a bennük rejlő konstruktív lehetőségek vonzzák a tanulók érdeklődését és esztétikai élményt is kínálnak tanulónak, tanárnak egyaránt. Egy-egy témakör feldolgozása igen jól hasznosítható az oktatásban mind a gondolkodást serkentő tényezők tudatosításában (hasonlóságok, analógiák felismerése, általánosítások felvetése stb.), mind pedig a megoldások szabatossága iránti igény kialakításában.

Az előbbi állítások helyességéről bárki meggyőződhet, a választható témákban nincs hiány, miként ezt több kombinatorikus geometriai tárgyú publikáció is bizonyítja ([2], [3], [4], [5], [6], [9], [10]).

Ebben a cikkben a feldarabolási problémakör néhány alapfeladatának bemutatásával egy újabb területre kívánjuk felhívni a figyelmet.

A következő kérdéssel foglalkozunk: a síkot, vagy a teret megadott alakzatok hány tartományra bontják? Megvizsgáljuk a sík feldarabolásának kérdését abban az esetben, ha az alakzatok egyenesek, körök, négyzetek. Foglalkozunk a tér síkokkal és gömbökkel való feldarabolásával és utalunk a megfelelő magasabb dimenziós kérdésekre.

Megmutatjuk, hogy az ún. Venn-diagramok geometriai vizsgálata miként illeszkedik a feldarabolási problémákhoz. Ennek kapcsán látni fogjuk, hogy a tér és a sík feldarabolásai mellett igen speciálisnak tűnő probléma, az egyenes intervallumokkal való feldarabolása is érdekes eredményekhez vezet.

A téma összeállításakor értékes útmutatást találtunk Pólya György [12] munkájában. A feldarabolási feladatok ismertetését az ő gondolatainak felidézésével kezdjük.

1. Hány részre osztja a teret öt sík?

Ha a síkok egymással párhuzamosak, a válasz nyilvánvalóan 6. Ha a síkok egymáshoz képest „általánosabb helyzetben" vannak, bizonyára több rész keletkezik. Már az a három sík is, amit egy szoba felső sarkában találkozó két oldalfal és a plafon határoz meg, lakásunk szintjén négy térrészt, a felső emeleten újabb négy térrészt, összesen 8 részt különít el a térben.

A kiindulási kérdést tehát pontosabbá kell tennünk. Erre több lehetőség is kínálkozik, fogalmazzunk meg közülük kettőt:

A) Hány részre osztja a teret öt általános helyzetű sík?

B) Maximum hány részre osztja a teret öt sík?

Az *A)* kérdéssel foglalkozunk először és egyelőre ne törődjünk vele, hogy definíció híján, öt sík általános helyzetét illetően csak érzéseinkre támaszkodhatunk.

Miért éppen öt síkra vonatkozik az *A)* kérdés, miért nem akárhányra, pl. 4, 3, 2 vagy 1 síkra? Ez az akadékoskodás a megoldási folyamat fontos pillanata, az eredetinél *általánosabb kérdést* provokál s egyben felhatalmaz *egyszerűbb* esetek, vagyis *analóg kérdések* vizsgálatára.

Jelölje n a síkok számát. Térszemléletünk már sikeresen megbírkózott az $n=3$ esettel, az $n=1$ és 2 esetek még egyszerűbbek. A következő analóg probléma az $n=4$ eset. Ha a síkokat egy

tetraéder lapsíkjainak képzeljük, az első határozottan felismerhető térrész a tetraéder belseje. A négy síknak ez az elhelyezkedése igen hasonlít arra az ábrára, melyen egy háromszög oldalegyenesei láthatók és az általuk létrehozott 7 síkdarab: a háromszög belseje, 3 síkdarab a csúcsoknál, 3 pedig az oldalaknál.

Ez az ábra hasznos *modellnek* bizonyul, a tartományok összeszámolása a modellen egyszerűen végrehajtható és a számolási módszer a tetraéder síkjaira is átvihető. Itt a tartományok száma 15 lesz: a tetraéder belseje, 4 tartomány a csúcsoknál, 6 az éleknél, 4 pedig a lapoknál.

A szemlélődés és gondolkodás folyamatában újabb fontos állomáshoz érkeztünk, úgy látszik érdemes megoldani a síkbeli *analóg feladatot,* hiszen ez modellként szolgálhat a térbeli feladat megoldásához.

Itt az ideje, hogy áttekintsük észrevételeinket, és ha alapos rendet akarunk teremteni, nem kerülheti el figyelmünket a lehető legegyszerűbb ide tartozó jelenség sem: egy egyenest n pontja $n+1$ részre bontja.

Feldarabolók száma	Tartományok száma		
	egyenest pontokkal	síkot egyenesekkel	teret síkokkal
0	1	1	1
1	2	2	2
2	3	4	4
3	4	7	8
4	5	?	15
5	6		?
.	.		
.	.		
.	.		
n	$n+1$		

Adataink között rendet teremtettünk, kezdődhet a kísérletezés, találgatás, milyen szabályosságok rejlenek a számoszlopokban, van-e összefüggés a számoszlopok közt. Találgatásainkat *sejtésekben* fogalmazzuk meg és „kísérletesen" ellenőrizzük.

Hamar rábukkanunk egy „szabályra", mely helyesen működik a táblázatunk második és harmadik oszlopában álló adatokra: egy szám a felette levő és az ettől balra elhelyezkedő számok összege. Ha ez így van, akkor a kérdőjelek helyére $4+7=11$, illetve $11+15=26$ fog kerülni. Azt kell most eldöntenünk, helytállóak-e ezek az előrejelzések.

Az első *kísérlet* abból áll, hogy három egyeneshez hozzáveszünk egy negyediket és megfigyeljük, miként változik a tartományok száma. Három egyenes, tudjuk, 7 tartományt hoz létre a síkon. Az új egyenes, látjuk, annyi régi tartományt oszt ketté, ahányat metsz; ezeknek a száma pedig — az új egyenesen levő három metszéspont ezt jól mutatja — éppen 4. A síkrészek száma tehát $7+4+11$, feltéve, hogy létezik a negyedik egyenesen a 3 metszéspont.

Hasonló kísérlettel ellenőrizhető az az előrejelzés, hogy öt sík 26 darabra vágja a teret. Ha a 15 tartományt létrehozó négy síkhoz egy ötödiket veszünk, ez bizonyos tartományokat kettévág. Minden ilyen tartománynak ott a „nyoma" az ötödik síkon, éspedig a négy másik sík metszetegyeneseként, pontosabban az általuk létrehozott 11 síkdarab formájában. A térrészek száma tehát $15+11=$ $=26$, feltéve, hogy tényleg ott van az ötödik síkon a négy különböző metszetegyenes és azok létre is hozzák a 11 síkdarabot.

Ha tehát pontosan megfogalmazzuk a kísérletből adódó feltételt a síkok elhe-

lyezkedésére, az *A)* kérdést megválaszoltuk.

Az általános elhelyezkedésre vonatkozóan a következő *definíciókat* adhatjuk meg:

n egyenes általános helyzetű a síkban, ha bármely kettő metsző, de bármely háromnak nincsen közös pontja;

n sík általános helyzetű a térben, ha bármely háromnak van közös pontja, bármely négynek viszont nincsen.

1.1. Gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy a tér $n+1$ *általános helyzetű síkja közül bármelyiken a többi sík n metszetegyenese általános helyzetű!*

1.2. Gyakorlat. Győződjünk meg róla, hogy a tér öt általános helyzetű síkja közül bármelyiket a többi négy sík pontosan 11 *tartományra bontja!*

A felállított szabály alapján adott előrejelzések beváltak. Egyre jobban bízhatunk abban, hogy ezzel a szabállyal az *n* síkra általánosított kérdést is megoldjuk, hiszen a kísérletes ellenőrzéskor csak a megelőző adatok ismeretére támaszkodtunk.

Ezt a sejtést azonban *bizonyítanunk* kell. Mint a következő szakaszban látni fogjuk, ez a bizonyítás mindössze az eddig elmondottak pontos, matematikai nyelven való megfogalmazásából fog állni.

1.3. Gyakorlat. Válaszoljuk meg a B) kérdést, vagyis határozzuk meg, hogy öt sík maximálisan hány részre bonthatja a teret!

A matematikai eredmények közlésének hagyományai szerint a szerző tételeket, állításokat mond ki, és azokat bebizonyítja. A folyóiratok szűk keretei nem teszik lehetővé, és általában a szakember sem igényli, hogy a szerző az eredmények pontos ismertetése mellett az eredményekhez vezető hosszadalmas út élményeiről is tudósítson. El kell ismerni, hogy a matematikusnak magánügye, hogy miként gondolkodik. A pedagógus számára azonban a problémamegoldás teljes folyamata szinte fontosabb, mint az ismereteket tételekbe merevítő végeredmény. Ebből a szempontból talán nem volt haszontalan az öt sík probléma részletes analízise.

A feldarabolási feladatkör további eredményeit már a hagyományoknak megfelelően tárgyaljuk, de mint már eddig is, egyszerűbb gyakorlatok kitűzésével kívánjuk lehetővé tenni az Olvasó bekapcsolódását a problémamegoldási tevékenységbe.

2. Feldarabolás síkokkal, egyenesekkel és körvonalakkal

Először is ígéretünkhöz híven bebizonyítjuk az előző szakaszban megfogalmazódott sejtést, majd az eddigi kérdések mellé újakat sorakoztatunk.

2.1. Állítás. *n általános helyzetű egyenes a síkot* $1+\frac{n(n+1)}{2}$ *tartományra vágja.*

Bizonyítás. Jelölje E_n a keletkező tartományok számát! Nyilván $E_0=1$. Az előző szakaszban a négy egyenesre látott kísérlet tetszőleges *n*-re is elvégezhető, ami azt bizonyítja, hogy $E_{n+1}=E_n+(n+1)$. Ebből a rekurzív összefüggésből,

$$E_n=((\ldots((E_0+1)+2)+\ldots)+n-1)+n=1+\frac{n(n+1)}{2}. \quad \blacksquare$$

A bizonyításban bevezetett E_n jelöléshez hasonlóan, jelölje S_n azon térrészek számát, melyet *n* általános helyzetű sík határoz meg a térben.

2.2. Állítás.

$$S_{n+1} = S_n + E_n.$$

Bizonyítás. Az előző szakaszban látott kísérletet öt sík helyett $n+1$ síkra is elvégezhetjük. Az 1.1. Gyakorlat alapján az $(n+1)$-edik síkot a többi sík n általános helyzetű egyenesben metszi. Ezért az $(n+1)$-edik sík felvételével az S_n darab régi térrész közül éppen E_n számút vág ketté. ∎

Binomiális együtthatók használatával, emlékeztetőül $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, a 2.2. Állításban bizonyított rekurzió csinos alakra hozható:

2.3. Gyakorlat. Igazoljuk, hogy

$$E_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} \quad \text{és}$$

$$S_n = \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}.$$

Négy általános helyzetű egyenes a síkot 11 részre bontja, közülük 3 korlátos, 8 pedig végtelen tartomány.

2.4. Állítás. *n általános helyzetű egyenes a síkot $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$ korlátos tartományra vágja.*

Bizonyítás. Jelölje E_n^{∞} a végtelen tartományok számát! Foglaljuk be az összes korlátos tartományt egy körbe! Ezt a kört a megadott n egyenes $2n$ ívre vágja, és minden ív egy-egy végtelen tartományt jelez. Ezért $E_n^{\infty} = 2n$ és a 2.3. Gyakorlat alapján a korlátos tartományok száma:

$$E_n - E_n^{\infty} = \binom{n}{2} - \binom{n}{1} + \binom{n}{0}. \quad ∎$$

Áttérünk arra a kérdésre, hogy n kör hány részre vágja a síkot. Akkor mondjuk, hogy n körvonal általános helyzetű a síkon, ha bármely kettőnek két közös pontja van, bármely háromnak viszont nincsen közös pontja.

Jelölje K_n azon tartományok számát, melyet n általános helyzetű körvonal határoz meg a síkon! Nyilván $K_1 = 2$.

2.5. Gyakorlat. Mutassuk meg, hogy minden $n \geqq 1$ számra $K_{n+1} = K_n + 2n$, továbbá $K_n = n^2 - n + 2$.

Az E_n^{∞} jelöléshez hasonlóan legyen S_n^{∞} azon végtelen térrészek száma, melyet n általános helyzetű sík határoz meg a térben!

2.6. Állítás.

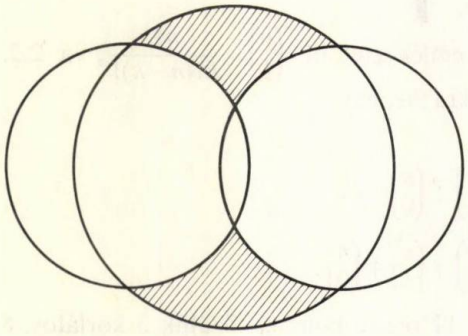
$$S_n^{\infty} = K_n.$$

Bizonyítás. Megadott középpont körül vegyünk fel egyre nagyobb sugarú gömböket a térben! Egy idő után a gömbök tartalmazzák az adott n sík közül bármely három közös pontját, majd az összes korlátos tartományt is. Egy „óriásgömb felszínéről visszanézve" a korlátos tartományokat már meg sem tudjuk különböztetni a középponttól. A síkok ezt a gömböt n „általános helyzetű" körvonalban metszik és a gömbfelszínen létrehozott tartományok egy-egy végtelen térrészt jeleznek.

Terítsük ki síkká a gömb felszínét egy sztereografikus projekcióval, azaz a gömb északi sarkából vetítsük le a köröket a déli sarkot érintő síkra! A vetítéssel a sík n

általános helyzetű körét kapjuk és a tartományok száma természetesen nem változik, ezért $S_n^\infty = K_n$. ∎

2.7. Gyakorlat. Igazoljuk, hogy n általános helyzetű sík $\binom{n}{3}-\binom{n}{2}+\binom{n}{1}-\binom{n}{0}$ *korlátos részre bontja a teret!*



1. ábra

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a körvonalakra vizsgált feldarabolási feladat térbeli általánosításával óvatosan kell bánni. Az 1. ábrán három kört látunk közös centrálissal. A centrális körüli (térbeni) forgatással három gömbfelületet kapunk. Ezek 7 térrészt határoznak meg, minthogy a vonalkázott tartományok ugyanazon gyűrűszerű térrészhez fognak tartozni. A kapott gömböket metszésviszonyaik alapján „általános helyzetűnek" kell tekintenünk. Ugyanakkor nem nehéz három gömböt úgy megadni a térben, hogy azok 8 térrészt hozzanak létre.

Az első és a mostani szakasz tanulságai alapján az Olvasó bátran nekivághat egy gömbfelületekre vonatkozó „értelmes" kérdés kitűzésének és megoldásának. Ha nem boldogulna, próbáljon további ötleteket meríteni a következő szakaszból.

3. A magasabb dimenziókról

Sok geometria feladatot ismerünk, melyet analitikus módszerekkel kényelmesebben lehet megoldani, mint elemi geometriai úton. A tekintélyes francia matematikus Dieudonné J. egyenesen azt vallja, hogy az elemi geometria nem egyéb, mint lineáris algebra, és egy 1959-es kongresszuson ezt kiáltja világgá: Vesszen Euklidész!", „Halál a háromszögekre!".

Az algebrai szemlélet híveinek abban természetesen igazuk van, hogy a vektorok és koordináták a geometria hatékony eszközei. Segítségükkel egyebek között lehetővé válik a geometriai intuíció átmentése a szemléletünk elől elzárt területekre, a magasabb dimenziók világába.

A d-dimenziós geometria aritmetikai megalapozásakor, mint ismeretes, a tér pontjai valós számokból álló $(x_1; x_2; \ldots; x_d)$ sorozatok; a sorozat elemeit a pont koordinátáinak mondjuk. Egy $(a_1; \ldots; a_d)$ pontból a $(b_1; \ldots; b_d)$ pontba vezető vektornak a $(b_1-a_1; \ldots; b_d-a_d)$ sorozatot nevezzük. A tér egy pontja így a $(0; 0; \ldots; 0)$ „kezdőpontból" a ponthoz vezető ún. helyvektornak is tekinthető.

A koordinátákkal a szokásos módon értelmezhető a vektorok összeadása és számszorosa, két vektor skaláris szorzása és szöge, stb. A d-dimenziós tér, teljes nevén, a d-dimenziós valós Euklideszi tér különféle alakzatainak megadása, valamint sík- és térgeometriai analógiák alapján való megnevezése ezek után nem okoz különösebb gondot.

A sík tengelyekkel párhuzamos oldalú és egyik csúcsával a kezdőpontra illeszkedő, első síknegyedben elhelyezkedő egységnégyzetének d-dimenziós megfelelője az a d-dimenziós kocka, melynek 2^d csúcsa van, minden csúcsának minden koordinátája 0 vagy 1 és további pontjainak összes koordinátája 0 és 1 közötti szám.

A d-dimenziós térben egy „gömbfelszín" olyan pontok halmaza, melyek egy rögzí-

tett ponttól, a középponttól adott r távolságra vannak; tehát pl. egy $(0; 0; \ldots; 0)$ középpontú gömb $(x_1; \ldots; x_d)$ pontjainak egyenlete $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_d^2=r^2$.

A tér 3 koordinátatengelyének, 3 koordinátasíkjának, valamint az általuk létrehozott 8 térrésznek, ún. ortánsoknak a d-dimenzióban sorra d koordinátatengely, d darab $d-1$ dimenziós tér, ún. koordináta-hipersík, valamint az általuk létrehozott 2^d darab *ortáns* felel meg.

Jelölje a továbbiakban R^d a d-dimenziós valós Euklideszi teret.

3.1. Gyakorlat. Válasszuk ki R^d egy tetszőleges pontját és adjuk meg a vele egy ortánsba eső pontok halmazát!

A sík egyeneseinek, vagy a tér síkjainak magasabb dimenziós megfelelői R^d *hipersíkjai,* melyek az R^d-ben elhelyezkedő $d-1$ dimenziós terek. Egy hipersík egyenlete $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_dx_d=c$ alakú, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_d$ és c tetszőleges valós számok azzal a kikötéssel, hogy valamelyik a_i nem nulla. Ebből azonnal látható, hogy egy hipersík R^d-t két részre, ún. *félterekre* bontja.

3.2. Gyakorlat. Mutassuk meg, hogy R^d-nek a koordináta-hipersíkoktól különböző bármely hipersíkja az ortánsoknak legalább a felét metszi!

Két hipersíkot *párhuzamosnak* mondunk, ha nincsen közös pontjuk.

3.3. Gyakorlat. Mutassuk meg, hogy ha R^d két hipersíkja nem párhuzamos, akkor metszetük egy $d-2$ dimenziós tér!

3.4. Gyakorlat. Mutassuk meg, hogy R^d egy hipersíkját gömbbel elmetszve, eggyel kisebb dimenziós gömböt, vagy egyetlen pontot kapunk, hacsak metszetük nem üres!

Sok érdekes példát lehet találni arra, hogy síkbeli vagy térbeli állítások magasabb dimenziós megfelelői hamisnak bizonyulnak, vagy bizonyításuk nem várt nehézségekbe ütközik (l. [2]). Vannak persze olyan állítások, tételek is, amelyek magasabb dimenzióban szó szerint érvényben maradnak, vagy a dimenzió függvényében értelemszerűen módosulnak.

Ismeretes pl., hogy ha az egyenes n intervalluma páronként metsző, akkor az intervallumoknak van közös pontja. Ez az állítás érvényes marad a sík koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapjaira és általában R^d ún. boxaira.

R^d egy *box*ának $2d$ kettesével párhuzamos $d-1$ dimenziós lapja van és ha két „átellenes" csúcsa $(a_1; \ldots; a_d)$ és $(b_1; \ldots; b_d)$, $(a_i \neq b_i$ minden $1 \leqq i \leqq d$ indexre), akkor csúcsai olyan pontok, melyeknek i-edik koordinátája a_i vagy b_i. Másszóval R^d boxai a koordináta hipersíkokkal párhuzamos lapú parallelepipedonok.

Az egyenes intervallumait azonban nemcsak mint R^1 „boxait", hanem mint R^1 konvex halmazait is általánosíthatjuk. Így az intervallumokra mondott állítás már nem marad érvényben, R^d konvex halmazaira igaz viszont a Helly-tételben megfogalmazott, dimenziótól függő állítás, miszerint: ha R^d n konvex halmaza közül bármely $(d+1)$-nek van közös pontja, akkor metszetük nem üres.

E kis kitérő után térjünk vissza a feldarabolási kérdésekhez.

Az R^d n hipersíkját *általános helyzetűnek* nevezzük, ha közülük bármely d-nek van közös pontja, viszont bármely $d+1$ metszete üres.

3.5. Gyakorlat. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be az 1.1. Gyakorlatban szereplő állítás d-dimenziós megfelelőjét!

Jelölje $H(n; d)$ azon térrészek számát, melyet n általános helyzetű hipersík határoz meg R^d-ben. Nyilvánvalóan $H(n; 1)=n+1$ és $H(1; d)=2$.

3.6. Állítás.

$$H(n+1;\ d) = H(n;\ d) + H(n;\ d-1).$$

Bizonyítás. Megadott n hipersíkhoz vegyünk egy $(n+1)$-ediket és nevezzük el T-nek! A korábbi $H(n;\ d)$ térrész közül T bizonyosakat kettévág, ezeket T-ben fogjuk összeszámolni. A 3.3. Gyakorlat szerint T-t a többi hipersík $d-2$ dimenziós terekben metszi. A 3.5. Gyakorlat alapján ezek a metszetek (a $d-1$ dimenziós) T általános helyzetű hipersíkjai, melyek T-t ezért $H(n;\ d-1)$ részre vágják. ∎

3.7. Gyakorlat. Igazoljuk, hogy

$$H(n;\ d) = \binom{n}{d} + \binom{n}{d-1} + \ldots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}.$$

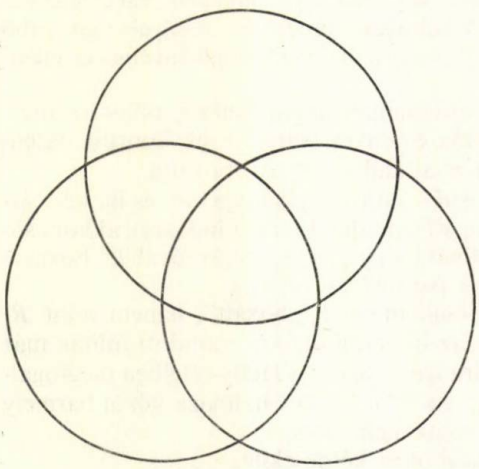
Érdekességként megemlítjük, hogy a 3.7. Gyakorlatban szereplő formulát egy múlt században működő matematikus, Schläfli L. bizonyította be először ([13]).

4. A Venn-diagram

Az ábráknak nemcsak a geometriában van fontos szerepük. A legkülönbözőbb feladatok megoldásában is segíthetik a kiindulási adatok elrendezését, összefüggések felismerését, megkönnyíthetik a feltárt összefüggések későbbi felidézését és ellenőrzését.

Az alábbi „szöveges példa" megoldásához legtöbben bizonyára nem egyenletrendszer felállításával, hanem három körvonal megrajzolásával kezdenénk hozzá.

4.1. Fejtörő. Az 5.*b.* osztályban ugyanannyi a fiú, mint a lány. A tanulók közül 18 napközis és ugyanennyien járnak sportkörre. Az osztály 6 énekkarosa közül csak egy nem napközis, a sportkörre járó napközisek száma pedig 10. Összesen hárman tagjai a sportkörnek és az énekkarnak is, mindegyikük napközis, és csak 10 tanuló van, aki se sportkörre, se énekkarra nem jár. Mekkora az 5.b. létszáma?



2. ábra

A fejtörő megfejtéséhez készített 2. ábrán a három körvonal 8 tartományra bontja a síkot, a tartományok az iskolai elfoglaltságok összes lehetséges variációját szemléltetik. Ugyanezt az ábrát az énektanár is felrajzolhatja a táblára, amikor elmagyarázza az énekkarosoknak, hogy a C-dúr, F-dúr és G-dúr skálák közös hangjaiból egy pentaton hangsor alakul ki.

A matematika különböző területein már régóta használatosak az ilyen rajzok, ún. Venn-diagramok, a halmazok és halmazműveletek szemléltetésére, logikai következtetések vizsgálatára. Legújabban maga a Venn-diagram a vizsgálatok tárgya. Ebben és a további szakaszokban éppen ezeknek a kombinatorikus geometriai vizsgálatoknak a bemutatása a célunk.

Egy Venn-diagramot a köröknél általánosabb alakzatokkal, n egyszerű zárt görbével adunk meg a síkon. Minden görbe belseje valamilyen halmazt ábrázolhat, külseje pedig annak komplementerét.

Az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ görbecsaládot *Venn-diagramnak* nevezzük, ha a görbék a síkot pontosan 2^n tartományra bontják és a tartományok megegyeznek az összes lehetséges $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ alakú halmazzal, ahol minden X_i helyére az A_i egyszerű, zárt görbe belsejét, vagy külsejét írhatjuk.

A körvonalakról az egyszerű zárt görbékre történő általánosítás okára nyomban rávilágít az alábbi észrevétel, mely már Venn J. 1880-as dolgozatában is megtalálható:

4.2. Állítás. *Bármely Venn-diagramban legfeljebb három körvonal fordulhat elő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_k$ egy Venn-diagramban szereplő körvonalak! Ekkor persze az összes $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k$ alakú halmaz nem üres ($X_i = A_i$ belseje vagy külseje), tehát csak a körvonalakat tekintve, ezek legalább 2^k tartományra vágják a síkot.

Megmutatjuk most, hogy a tartományok száma legfeljebb $k^2 - k + 2$, amiből az előbbi megjegyzés alapján $k \leqq 3$ adódik.

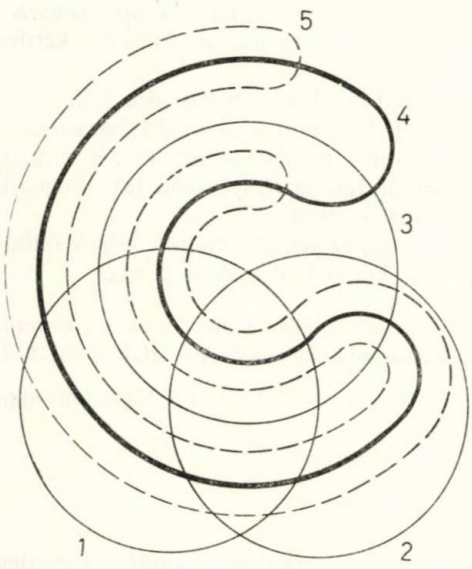
Minthogy a körvonalaink szükségképpen páronként metszik egymást, a középpontokból történő igen csekély nagyításokkal elérhető, hogy a körvonalak általános helyzetűekké váljanak és a tartományok száma ne csökkenjen. A 2.5. Gyakorlatból következik, hogy a módosítás után pontosan $k^2 - k + 2$ a tartományok száma. ∎

4.3. Gyakorlat. Döntsük el, hogy szerepelhet-e egy Venn-diagramban négy box (azaz a koordináta tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalap)!

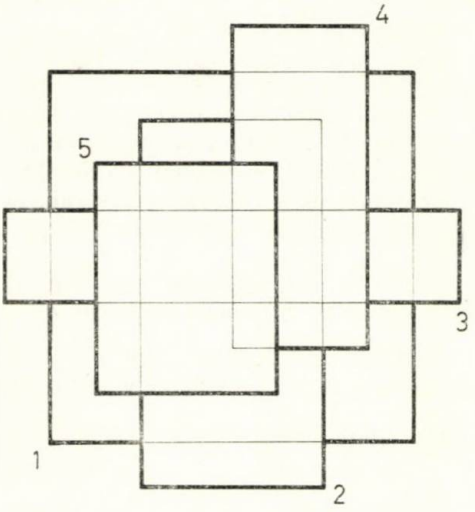
Kicsit talán meglepő, de teljesen jogos az a kérdés, hogy léteznek-e egyáltalán „sok" görbét tartalmazó Venn-diagramok.

4.4. Gyakorlat. Mutassuk meg, akár a 3. ábrát folytatva, akár más úton, hogy bármely n értékre lehet n görbét tartalmazó Venn-diagramot készíteni!

A Venn-diagramok magasabb dimenziós kiterjesztésére többféle lehetőség kínálkozik (l. [8]). A feldarabolási kérdésekhez igazodva az általánosításhoz a Venn-diagram



3. ábra



4. ábra

definíciójában szereplő $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ alakú halmazokat, az ún. atomokat vesszük alapul.

Ha a síkot n görbe p síkdarabra vágja és a létrejövő atomok száma a, akkor nyilvánvalóan $a \leqq p$. Venn-diagramokra definíció szerint $a=p=2^n$ teljesül. Az 1. ábrán látható három körvonal esetében $p=8$, de $a=7$, hiszen a bevonalkázott síkdarabok ugyanahhoz az atomhoz tartoznak.

4.5. Gyakorlat. a) Számoljuk meg a 4. ábrán látható öt box atomjait a síkon!

b) Az i jelű box belsejét jelöljük B_i-vel, külsejét $\bar{B}_i$-vel! $(1 \leqq i \leqq 5)$! *Léteznek-e és ha igen hány síkdarabból állnak a* $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap \bar{B}_5$, $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \bar{B}_4 \cap \bar{B}_5$, $B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{B}_4 \cap \bar{B}_5$ *és* $B_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{B}_4 \cap \bar{B}_5$ *atomok?*

5. A maximális atomszám kérdése

Legyenek $B_1, B_2, \ldots, B_n$ megadott halmazok R^d-ben! A tér egy x és y pontját *ekvivalensnek* mondjuk, és ezt röviden így jelöljük: $x \sim y$, ha x pontosan ugyanazon B_i halmazok metszetében van benne, mint y. Az így definiált kapcsolat nyilvánvalóan ekvivalencia reláció (reflexiv, szimmetrikus és tranzitív), a $\mathcal{B}=\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ halmazcsalád tehát R^d pontjait ekvivalencia osztályokra bontja. Ezeket az ekvivalencia osztályokat nevezzük a $\mathcal{B}$ család *atomjainak*; és a család által létrehozott atomok számát jelöljük $a(\mathcal{B})$-vel.

5.1. Gyakorlat. Ha $\mathcal{B}=\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ *az* R^d *féltereinek egy családja és a féltereket határoló hipersíkok általános helyzetűek, akkor* $a(\mathcal{B})=\sum_{i=0}^{d}\binom{n}{i}$.

Ha $\mathcal{B}$ egy Venn-diagram görbéi által határolt n síkbeli alakzat, akkor nyilván $a(\mathcal{B})=2^n$, ami úgy is megfogalmazható, hogy minden lehetséges atom létezik.

Ha a $\mathcal{B}$ halmazcsalád tagjai csak megadott típusú alakzatok lehetnek, érdekes probléma annak meghatározása, hogy maximálisan hány atomot hozhatnak létre az ilyen családok. Ezek az 1. szakasz *B)* kérdéséhez hasonlító problémák tipikus *extremális feladatok*. Az extremális feladatok megoldásának fő lépéseit a következő kérdés megoldásával mutatjuk be:

A sík n egybevágó, egyállású négyzete maximálisan hány atomot hoz létre?

Jelöljük ezt a maximális atomszámot $A(n)$-nel. Feladatunk $A(n)$ meghatározása.

1. lépés. Felső korlátot keresünk $A(n)$-re. Legyen a továbbiakban $\mathcal{N}$ egy n tagú, egybevágó és egyállású négyzetekből álló család! Jelölje $t(\mathcal{N})$ azon tartományok számát, melyre a négyzetek határa feldarabolja a síkot!

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $\mathcal{N}$ négyzeteinek nincsen közös oldalegyenese. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez nem befolyásolja $A(n)$ értékét:

5.2. Gyakorlat. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{N}$ *tagjainak csekély módosításával elérhető, hogy a kapott* $\mathcal{N}'$ *család tagjainak nincsen közös oldalegyenese és* $a(\mathcal{N}) \leqq a(\mathcal{N}')$.

Az előbbi egyszerűsítés alapján azonnal látható, hogy $a(\mathcal{N}) \leqq t(\mathcal{N})$, hiszen minden atomnak van pontja valamely tartományból.

5.3. Állítás.

$$t(\mathcal{N}) \leqq n^2-n+2.$$

Bizonyítás. Teljes indukció $\mathcal{N}=\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ tagjainak számára. Egyetlen négyzet határa két tartományra bontja a síkot. Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$

négyzetek határai legfeljebb $(n-1)^2-(n-1)+2=n^2-3n+4$ tartományt hoznak létre.

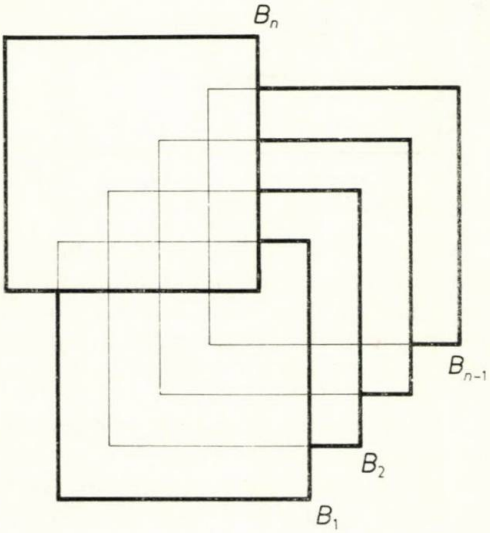
Mivel bármely két egyállású (közös oldalegyenessel nem rendelkező) négyzet határának legfeljebb két közös pontja lehet, ezért B_n határát a többiek legfeljebb $2n-2$ részre vágják. Természetesen legfeljebb ugyanennyivel növekedhet a tartományok száma is B_n felvételével:

$$t(\mathcal{N}) \leqq n^2-3n+4+2n-2 = n^2-n+2. \quad \blacksquare$$

Nevezzük $\mathcal{N}$-et *extremális családnak*, ha atomszáma maximális, azaz $a(\mathcal{N})=A(n)$.

Az 5.3. Állítás minden $\mathcal{N}$-re, tehát az extremális családokra is érvényes, vagyis $A(n)\leqq n^2-n+2$.

2. lépés. Alsó korlátot adunk $A(n)$-re. Ehhez olyan négyzetcsaládot kell konstruálnunk, mely „sok" atomot hoz létre. Ebből a célból tekintsük azt a négyzetet, jelöljük B_0-val, amelynek csúcsai a $(0;0)$, $(0;n)$, $(n;n)$ és $(n;0)$ pontok! Toljuk most el B_0-t n különböző helyre a síkon úgy, hogy $(0;0)$ csúcsa sorra az $(1;1)$, $(2;2)$, ..., $(n-1;n-1)$ és $(0;n)$ pontokba kerüljön! Jelöljük a kapott négyzeteket B_1-, B_2-, ..., B_n-nel (l. 5. ábra)!



5. ábra

5.4. Gyakorlat. Mutassuk meg, hogy az imént szerkesztett négyzetcsalád pontosan n^2-n+2 atomot hoz létre!

A feladatot ezzel megoldottuk: $A(n)=n^2-n+2$.

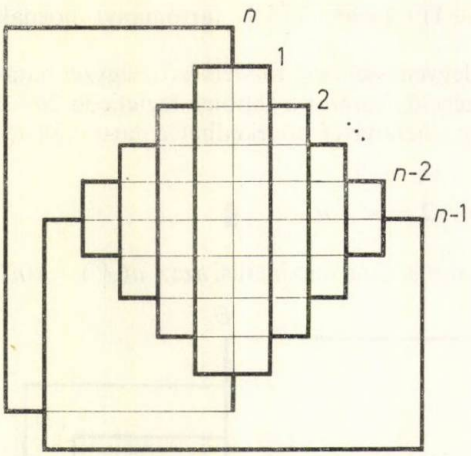
Az extremális problémák megoldása természetesen nem mindig ilyen egyszerű feladat. Sok esetben a két lépés alapján adódó becslések nem egyeznek meg és még az alsó és felső korlátok egymáshoz közelítése is reménytelenül nehéz vállalkozásnak bizonyul. Bizonyítás nélkül bemutatunk néhány ilyen „nem pontos" megoldást is, amit Gyárfás Andrással és Tuza Zsolttal közösen, a boxok maximális atomszámára adtunk.

Jelölje $A(n;d)$ az R^d n boxa által létrehozható atomok számának maximumát!

5.5. Állítás. *Minden $d\geqq 3$ esetén $A(n;d)\leqq 2^d\cdot\binom{n}{d}$, és vannak olyan d-dimenziós box családok, amelyek közel $2^d\cdot(n/d)^d$ atomot hoznak létre.*

Az állítás megfogalmazása jelzi, hogy általános box család konstrukciókat megadva nem érdemes pontosan meghatározni az atomok számát, hiszen az így adódó alsó korlát még mindig távol esik a felső becsléstől.

Kicsit más a helyzet $d=3$ esetén, amikoris úgy tűnik, hogy sikerült a legjobb konstrukciót megtalálni. A térben megadható n box úgy, hogy a létrehozott atomok száma pontosan $8\cdot\lfloor((n-2)^3+1)/9\rfloor+8$ és ehhez az értékhez nagyon közel van az $A(n;3)$-ra vonatkozó felső becslésünk. Azt sejtjük, hogy $A(n;3)$ értéke megegyezik az említett box család atomszámával.



6. ábra

Befejezésül megemlítjük, hogy hosszú ideig tartott, amíg sikerült $A(n; 2)$ értékének meghatározása és az extremális téglalap családok jellemzése. Már kezdetben úgy tűnt, hogy a 6. ábrán látható konstrukció atomszáma adja a maximumot, azaz $A(n; 2) = 2n^2 - 6n + 8$. Később még több, ugyanennyi atomszámú, tehát extremálisnak remélt konstrukciót is találtunk. Ezek tulajdonságainak tüzetes elemzése vezetett a probléma megoldásához.

6. *Intervallumok, gráfok és atomok*

A most következő krimi szerzője Berge C. professzor, a francia gráfelméleti iskola tekintélyes vezetője, szereplői pedig, természetesen két angol és egy gráf.

6.1. Fejtörő. Watson szemmel láthatóan kissé csüggedten tért vissza a városi könyvtárból. Sherlock Holmes éppen a pipáját tömte.

W: Az ügy módfelett rejtélyes, mindazonáltal roppant kényes.

SH: ?

W: Mindössze hat feddhetetlen professzor járt aznap délelőtt az archívumban, amikor az értékes kézirat eltűnt.

SH: Ha ketten egyidőben jártak ott, valamelyikük látta a másikat, nemde?

W: Csakugyan így történt. Mindegyikük csupán egyszer volt ott a délelőtt folyamán; a nyomozónak el is mondták, ki kit látott. Íme a válaszok.

SH: (gyorsan olvasva) prof. Fox látta Coxot és Egset, prof. Egs látta Boxot és Coxot, prof. Dox látta Adsot és Foxot, prof. Cox látta Doxot és Foxot, prof. Box látta Adsot és Foxot, prof. Ads látta Boxot és Egset.

Azzal visszacsúsztatta lupéját mellényzsebébe s pipájával, Watson legnagyobb meglepetésére, a cédulára bökött. Attól tartok — mondta — ez az úr itt nem teljesen feddhetetlen. Másnap meg is került a kézirat. Ki volt a tettes?

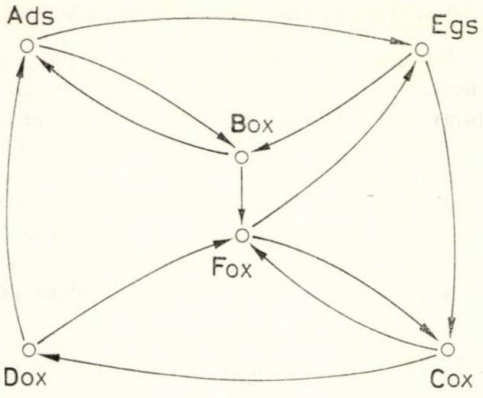
A megfejtés előtt ismerkedjünk meg a háttérben meghúzódó főszereplővel az intervallumgráffal.

Egy egyenesen megadott $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ intervallumcsaládhoz egy gráfot definiálhatunk a következő módon: V csúcshalmaza az intervallumokat reprezentáló $\{1; 2; \ldots; n\}$ halmaz, E élhalmaza pedig az intervallumok metszését ábrázolja úgy, hogy $xy \in E$ minden olyan esetben, ha $I_x \cap I_y \neq \emptyset$.

Bizonyos intervallumok metszésviszonyait az előbbiek szerint ábrázoló (V, E) gráfokat *intervallumgráfoknak* nevezzük. (Gráfelméleti fogalmakra vonatkozóan l. [1]).

Az intervallumgráf a matematikától távoli területeken is (régészet, biológia stb.) jól hasznosítható fogalom, s talán éppen ezért sokan vizsgálták, sokféle tulajdonsága ismeretes. Az egyik legalapvetőbb az, hogy nem tartalmazhat átló nélküli kört. Egy G gráf éleiből álló $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n, x_nx_1$ élláncot a gráf n hosszúságú körének nevezzük és G egy ezektől különböző x_ix_j $(1 \leqq i, j \leqq n)$ alakú élét a kör átlójának.

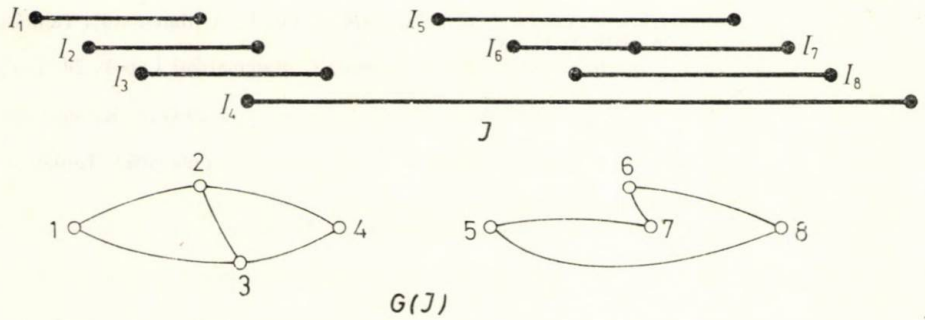
6.1. megfejtése. Rajzoljuk fel a vallomások alapján a 7. ábrán látható hat pontú gráfot, melyen prof. X vallomását a gráf X csúcsából kifutó két nyíllal jelöltük. A professzorok könyvtári tartózkodása ugyanakkor hat intervallummal ábrázolható; ha tehát mindegyikük igazat mondott, akkor a felrajzolt gráf intervallumgráf. Valakinek az állítása, nyilván a tettesé, azonban hamis, a gráf ugyanis nem intervallumgráf. Több kör is létezik, melyben nincsen átló, egyik a D, A, B, I csúcsokon, egy másik a D, A, E, C csúcsokon halad át. A kérdés tehát az, hogy kinek a vallomása nem egyeztethető össze a többivel, vagyis melyik csúcsból kell elhagyni a kifutó nyilakat, hogy intervallumgráfot kapjunk. Egyedül a D csúcs ilyen, a tettes tehát prof. Dox.



7. ábra

Az egyenes két intervalluma egymáshoz képest háromféleképp helyezkedhet el: vagy diszjunktak, vagy egyikük tartalmazza a másikat, vagy pedig *keresztezőek*. Egy intervallum család keresztezési viszonyait szintén ábrázolhatjuk gráffal, ún. keresztezésgráffal (l. 8. ábra).

Legyen $\mathcal{I}=\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ egy intervallum család és tekintsük az $\{1; 2; \ldots; n\}$ csúcshalmazon azt a gráfot, melyben xy akkor és csak akkor él, ha az I_x és I_y intervallumok keresztezők. Az így megadott gráfot $\mathcal{I}$ *keresztezésgráfjának* nevezzük és $G(\mathcal{I})$-vel jelöljük.



8. ábra

A keresztezésgráfokról jóval kevesebbet tudunk, mint az intervallumgráfokról, jó néhány velük kapcsolatos gráfelméleti kérdés még eldöntésre vár. Most a feldarabolási feladatokban játszott szerepükre mutatunk példát.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy az $\mathcal{I}$ család tagjai közös végponttal nem rendelkező zárt intervallumok R^1-ben.

Könnyű ellenőrizni, hogy n intervallumra a maximális atomszám $2n$, az itt következő állításban megadjuk a lehető legtöbb atomot létrehozó családok jellemzését. Egy gráfot *összefüggőnek* nevezünk, ha bármely két csúcsa összeköthető a gráf éleiből álló élláncal.

6.2. Állítás. *Ha a* $G(\mathcal{I})$ *keresztezésgráf összefüggő, akkor* $a(\mathcal{I})=2n$.

Bizonyítás. Minthogy $G(\mathcal{I})$ összefüggő, az $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ halmaz egy intervallum, melyet a belsejében levő $2n-2$ végpont $2n-1$ nyílt intervallumra vág. Megmutatjuk, hogy ezek a nyílt intervallumok más-más atomhoz tartoznak. Legyen egy A atom két tetszőleges pontja p és q és jelöljük P-vel a pq szakaszt! P nyilván nem keresztezheti $\mathcal{I}$ egyetlen tagját sem, ezért az $I_x \subset P \subset I_y$ tulajdonságú I_x és I_y intervallumokra elmondható, hogy x és y nem köthető össze $G(\mathcal{I})$-ben éllánccal. Azonban $G(\mathcal{I})$ összefüggő, így a $P \subset I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ szakasz belsejében nincsenek $\mathcal{I}$-beli intervallumok. A $2n-1$ nyílt intervallum tehát ennyi különböző atomot képvisel, R^1-nek az $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ halmazon kívüli része pedig plusz egy újabb atomot. ∎

6.3. Gyakorlat. Mutassuk meg, hogy a keresztezés gráf összefüggősége szükséges feltétele is annak, hogy egy intervallum család a lehető legtöbb atomot hozza létre!

Befejezésül felhívjuk a figyelmet arra, hogy az idei „Matematikatanárok versenyé"-nek tételeit e cikk tárgyához kapcsolódva állítottuk össze Gyárfás András kollegámmal. Tapasztalnunk kellett, hogy a feldarabolási problémák témája kimeríthetetlen gazdagságú könnyebb, súlyosabb feladatokban egyaránt.

Eredményes versenyzést kívánunk, a nyitott kérdések és rokonfeladatok iránt érdeklődőeknek pedig figyelmébe ajánljuk a kombinatorikus geometria egyik úttörő egyéniségének, Branko Grünbaumnak két munkáját: [7], [8].

IRODALOM

[1] *Andrásfai B.: Ismerkedés a gráfelmélettel.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
[2] *Boltyanszkij V. G., Gohberg I. C.: Tételek és feladatok a kombinatorikus geometriából.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
[3] *Elekes Gy.: A kombinatorikus geometriáról (a Helly tételkör) I és II.* A Matematika Tanítása 26, 2(1979) 59—64. és 26, 3(1979) 82—89.
[4] *Erdős P.: Néhány elemi geometriai problémáról.* Középiskolai Matematikai Lapok, 24 (1962) 193—201.
[5] *Erdős P.: Megjegyzések a néhány elemi geometriai problémáról című cikkhez.* Középiskolai Matematikai Lapok, 26 (1963) 1—2.
[6] *Gallai T.: Négyzetfelosztások, hálózatok, gráfok. Élő matematika* (tanulmányok). Tankönyvkiadó, Budapest (1969), 108—133.
[7] *Grünbaum B.: Arrangements and spreads.* Amer. Math. Soc., Providence 1972.
[8] *Grünbaum B.: Venn diagrams and independent families of sets,* Mathematics magazine, 48 (1975) 12—22.
[9] *Kárteszi F.: Kombinatorika a geometriában, geometria a kombinatorikában 1 és 2.* Középiskolai Matematikai Lapok, 29 (1964) 7—11 és 49—53.
[10] *Kárteszi F.: Geometriai módszer a számelméletben. Élő matematika* (tanulmányok). Tankönyvkiadó, Budapest, (1969), 73—90.
[11] *Kürschák J., Hajós Gy., Neukomm Gy., Surányi J.: Matematikai Versenytételek I. és II. rész.* Tankönyvkiadó, Budapest 1955 és 1957.
[12] *Pólya Gy.: Mathematics and plausible reasoning Vol. I. Induction and analogy in mathematics.* Princeton University Press, 1954.
[13] *Schläfli L.: Gesammelte mathematische Abhandlungen* (1. kötet). Birkhäuser, Basel, 1956.

A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára

A Bolyai János Matematikai Társulat 1979-től évenként versenyt rendez a matematikatanárok önálló szakmai munkájának kibontakoztatására. A versenyen részt vehetnek az alsó és középfokú oktatási intézményekben működő tanítók és tanárok.

A verseny feladatmegoldásból áll. A 8—10 feladatot minden év júliusában teszi közzé a Versenybizottság A Matematika Tanítása című folyóiratban. (A versenyfeladatok beszerezhetők még a Társulat Rátz László Vándorgyűlésén, valamint a Társulat központjában és helyi tagozataiban személyesen vagy postán. Az utóbbi esetben kérjük egy megcímzett válaszboríték küldését is.)

A 8—10 feladatot azonos témakörből tűzik ki. A Versenybizottság a témaköröket a matematikának olyan fejezeteiből választja ki, amelyeknek ismerete igen jól hasznosítható a korszerű iskolai oktatásban, a tanórai vagy szakköri munkában.

A júliusban kezdődő verseny előtt a Versenybizottság minden évben cikket vagy cikkeket jelentet meg A Matematika Tanítása című folyóiratban; ezzel segítséget kíván nyújtani a versenyfeladatsor megoldásához. Ez a cikk, illetve ezek a cikkek feladatokkal és elméleti összefoglalóval tájékoztatják a versenyen indulni kívánókat az évi témakörökről.

A cikk(ek)ben megjelent feladatok megoldásának beküldését nem kéri a Versenybizottság. A feladatokat és az elméleti anyagot minden év júliusában a Társulat Rátz László Vándorgyűlésén az érdeklődők a cikk(ek) szerzőinek irányításával szemináriumi formában dolgozzák fel.

A verseny eredményét minden év decemberében hirdetik ki. A Társulat pénzjutalomban részesíti a versenyen legeredményesebben szereplőket.

A versenyfeladatok

1. Adott a síkon n körvonal, ezek a síkot összefüggő tartományokra bontják. Bizonyítsuk be, hogy bármely tartomány határán legfeljebb $2n-2$ metszés- és érintéspontja lehet a köröknek!
2. Legyen P egy korlátos ponthalmaz a síkon, $\mathcal{B}$ pedig a sík boxainak egy családja azzal a tulajdonsággal, hogy P bármely két pontját fedi $\mathcal{B}$ valamely boxa! Bizonyítsuk be, hogy P lefedhető $\mathcal{B}$ legfeljebb öt boxával!
3. A d-dimenziós Euklideszi tér egy korlátos ponthalmazának burkán értsük a halmazt tartalmazó legszűkebb boxot! Legyen $d \geqq 2$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy pont benne van egy P halmaz burkában, akkor benne van P legfeljebb d pontjának burkában is!
4. Legyen $\mathcal{I}$ a $[0; 2k]$ szakasz egész végpontú zárt intervallumaiból álló család!
   a) Mutassuk meg, hogy $\mathcal{I}$ intervallumai $k+1$ osztályba csoportosíthatók úgy, hogy egyetlen osztályba se legyen két keresztező!
   b) Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{I}$ intervallumait k osztályba csoportosítjuk, akkor valamelyik osztályban mindig lesz két keresztező!
5. Mutassuk meg, hogy ha n és k pozitív egész számokra $n+1 \leqq k \leqq 2n$, akkor megadható n intervallum, amely pontosan k atomot hoz létre az egyenesen!
6. Határozzuk meg, hogy a sík n boxa maximálisan hány tartományra bontja a síkot!
7. Adjuk meg a sík három boxával lerajzolható összes lényegesen különböző Venn-diagramot! (A megoldóra bízzuk, hogy mit ért lényegesen különbözőn.)

8. A d-dimenziós Euklideszi tér n box-át nevezzük box-diagramnak, ha 2^n atomot hoz létre!

a) Mutassuk meg, hogy egy box-diagram legfeljebb $2d$ boxból állhat!

b) Adjunk meg $2d$ boxból álló box-diagramot!

GARÁDI JÁNOS
tudományos munkatárs
Budapest

Tájékoztató a Középiskolások 1982. évi Számítástechnikai Versenyéről I.

A Magyar Kommunista Ifjúsági Szövetség Központi Bizottsága Középiskolai és Szakmunkástanulói Tanácsa, a Művelődési Minisztérium Középfokú Nevelési Főosztálya, a Magyar Kommunista Ifjúsági Szövetség Budapesti Bizottsága és a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete az 1982. évben rendezte a IV. Középiskolai Számítástechnikai — szakmai képzéshez nem kapcsolódó, általános irányú — versenyt a budapesti és a meghívott vidéki középiskolák tanulói részére.

Ezen a versenyen 43 középiskola 221 csapata vett részt (egy csapat két versenyzőből állt).

A meghívott és a részt vett középiskolák és tanulók számát az alábbi táblázat tartalmazza.

	Budapest		Vidék		Összesen	
	gimnázium	szakközép-iskola	gimnázium	szakközép-iskola	gimnázium	szakközép-iskola
Meghívott	41	16	100	20	141	36
Részt vett	13	5	20	5	33	10
Csapat	82	57	52	30	134	87
Tanuló	164	114	104	60	268	174

Olyan feladatokat állítottunk össze a résztvevőknek, amelyek lehetővé tették:
— programozási nyelvismerettel nem rendelkezők indulását,
— rendszeres számítástechnikai oktatásban nem részesülő tanulók nevezését.

Az első fordulóra április 21-én került sor az ország 35 középiskolájában összevonva.

A verseny feladatai 5 témakört öleltek fel:

1. számkeresztrejtvény megfejtése,
2. adott algoritmus egy konkrét feladat esetén optimális-e,
3. osztályozó eljárás készítése minimális számú lépésben,
4. algoritmus készítése korlátos pontossággal számoló, „papír-ceruza" memóriával rendelkező zsebszámítógépre,
5. számítástechnikai szakszöveg értelmezése.

A feladatok megoldására két és fél óra állt a versenyzők rendelkezésére. A beérkezett dolgozatokat egy húsz főből álló bizottság értékelte ki. A döntőre az első fordulóban nyújtott teljesítményük alapján 45 csapatot hívott meg a versenybizottság. A május 7-én megtartott döntőn két kategóriában vetélkedtek a csapatok. A gimnáziumi kategóriában 31 csapat, a szakközépiskolai kategóriában 14 csapat vetélkedett.

A második fordulóban (döntőben) 6, speciális számítástechnikai előismereteket nem igénylő feladatot kellett megoldani a versenyzőknek.

Az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetének IBM

3031-es nagyszámítógépén terminálon fél óra állt a csapatok rendelkezésére az első feladat megoldásához. A második részben az elméleti feladatok megoldásához két óra állt a csapatok rendelkezésére. A budapesti döntőn részt vevő diákok költségeit a meghirdető szervek biztosították.

A versenybizottság

elnöke: *Knuth Előd,* a matematikai tudományok kandidátusa,
titkára: *Garádi János* tudományos munkatárs,
tagjai: *Babai László,* a matematikai tudományok kandidátusa,
Krámli András, a matematikai tudományok kandidátusa,
dr. Lengyel Tamás tudományos munkatárs,
dr. Ratkó István tudományos munkatárs
a következő iskolák csapatait részesítette jutalomban.

A díjazottak névsora a gimnáziumi kategóriában:

I. díjat (1000—1000 Ft-ot) kapott:
a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályának csapata, **Szabó Endre** és **Szalai János.**

II. díjat (900—900 Ft-ot) kapott:
a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium IV. osztályának csapata, **Csillag Luca** és **Tardos Gábor.**

III. díjat (500—500 Ft-ot) kapott:
— a budapesti József Attila Gimnázium IV. osztályának csapata, **Balogh Tibor** és **Zámbó Viktor,**
— a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályának csapata, **Czakó Tamás** és **Tóth Gábor.**

Különdíjat (500 Ft-ot) kapott:
a szegedi Ságvári Endre Gimnázium IV. osztályának tanulója, **Kruzslicz Ferenc.**

IV. díjat (200—200 Ft-ot) kapott:
— a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium II. osztályának csapata, **Erdős László** és **Tajti Róbert,**
— az oroszlányi Általános Gimnázium III. osztályának csapata, **Földvári Edit** és **Schmidt László,**
— a veszprémi Lovassy László Gimnázium IV. osztályának csapata, **Máthé József** és **Mohay Tamás,**
— a budapesti Ságvári Endre Gimnázium II. osztályának csapata, **Böröczky László** és **Kiss László,**
— a szegedi Ságvári Endre Gimnázium IV. osztályának csapata, **Bakonyi Tibor** és **Ótott Kovács István.**

A díjazottak névsora a szakközépiskolai kategóriában:

I. díjat (600—600 Ft-ot) kapott:
a székesfehérvári Ságvári Endre Híradástechnikai Szakközépiskola IV. osztályának csapata, **Akács Ildikó** és **Simák György.**

II. díjat (400—400 Ft-ot) kapott:
az egri Alpári Gyula Közgazdasági Szakközépiskola IV. osztályának csapata, **Bányai Béla** és **Sulya Kálmán.**

III. díjat (300—300 Ft-ot) kapott:

— a zalaegerszegi Csány László Közgazdasági Szakközépiskola IV. osztályának csapata, **Horváth Ildikó** és **Sebők Ferenc**,

— a budapesti Hámán Kató Közgazdasági Szakközépiskola IV. osztályának csapata, **Pálinkás Péter** és **Tóth Gábor**.

A fenti csapatokon kívül 80 tanuló részesült dicséretben.

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és a feladatok megoldásának ismertetésére május 28-án került sor.

A versenyzők részére felajánlott díjakat:
Demetrovics János, a matematikai tudományok doktora,
Kóbor Zoltán, a Művelődési Minisztérium munkatársa,
dr. Szivi József, a KISZ Központi Bizottsága osztályvezetője adta át a nyerteseknek.

A szervező bizottság nevében ez úton is szeretném kifejezni köszönetemet a középiskolák igazgatóinak és szaktanárainak, hogy lehetővé tették a tanulók részvételét és felkészítését a versenyre.

Külön köszönet illeti az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, a KISZ Központi Bizottsága Középiskolai és Szakmunkástanulói Tanácsa, a KISZ Budapesti Bizottsága, valamint a Művelődési Minisztérium illetékes Főosztályai vezetőit és munkatársait, akik lehetővé tették a középiskolások versenyének színvonalas lebonyolítását.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni. Budapest, Petőfi Sándor u. 10. II. 10.; 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldáshoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1035. Két játékos játszik. Az első mond egy egész számot, amely egynél nagyobb és tíznél kisebb. A második játékos ezt a számot szorozza egy, az előbbi feltételnek megfelelő számmal. Ezt a szorzatot most az első szorozza egy, a megadott számközből való számmal, és így tovább. A játékot az nyeri, aki szorzatával először lépi túl az 1000-et. Melyik játékos nyer?

1036. Igaz-e, hogy ha egy p-oldalú (p prím) konvex sokszögnek van két szimmetriatengelye, akkor a sokszög szabályos?

Ugray Zsolt, Budapest

1037. Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre az M, N, P pontokban érinti. Igazoljuk, hogy a háromszög akkor és csak akkor szabályos, ha

$$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\mathbf{0}.$$

1038. Melyek azok az x, y, z, t pozitív egész számok, amelyekre

$$3^x + 3^y + 3^z + 3^t$$

köbszám?

Bencze Mihály, Brassó

1039. Egy körvonalat felosztottunk $3k$ ponttal $3k$ részre úgy, hogy k darab ív hossza 1 egység, k darab ívé 2 egység, a többi ív hossza pedig 3 egység. Bizonyítsuk be, hogy bármely felosztás esetén van a $3k$ pont között két átellenes!

1040. Tekintsük a valós számtest feletti, a

$$2f^2(xy) \leqq f(x)f(y^3)+f(x^3)f(y)$$

függvényegyenlőtlenséget kielégítő, konstanstól különböző polinomfüggvényeket! Bizonyítsuk be, hogy ha $f(1983)>0$, akkor $f(x)\geqq 0$.

Bartha Gábor, Szentendre

Feladatmegoldások (1011—1016)

1011. Oldjuk meg az egész számok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$x+y+z = 1,$$

$$x^3+y^3+z^3 = 1,$$

$$xyz = -16.$$

Borsovszky Rudolf, Budapest

I. megoldás: A 16 a következő különböző módokon írható fel három pozitív egész szorzataként:

$$1\cdot 1\cdot 16, \qquad 1\cdot 4\cdot 4,$$

$$1\cdot 2\cdot 8, \qquad 2\cdot 2\cdot 4.$$

Az egyenletrendszer bármely gyökhármasának abszolútértékben és sorrendtől eltekintve meg kell egyeznie a fenti számhármasok valamelyikével.

Egyenletrendszerünk első egyenletét csak az 1, 4, 4 abszolútértékkel adott számhármas elégítheti ki, az előjelek alkalmas választásával; ez a számhármas a köbreemelés előjeltartása miatt a második egyenletet is kielégítheti. Nyilvánvaló tehát, hogy csakis az 1, 4, -4 választás lehet a jó. Mivel ez kielégíti egyenletrendszerünket, ezért egyenletrendszerünknek hat (x, y, z) megoldása van: az 1, 4, -4 hármas valamennyi permutációja.

Honti Dezső, Győr

II. megoldás: Használjuk fel az ismert

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(x+z)$$

azonosságot!

Egyenletrendszerünk első két egyenletéből tehát

$$(x+y)(y+z)(x+z) = 0$$

következik. Ezért az x, y, z egyike, az első egyenlet miatt csakis az 1 lehet, a másik kettő összege pedig zérus lévén, abszolútértékük egyenlő kell legyen. Ezért a harmadik egyenletünk miatt e kettő csakis a 4 és a -4 lehet. Ezekből pedig előbbi megoldásunk kerekedik.

Mészáros József, Galánta

Megjegyzés: Az I. megoldásból látható, hogy egyenletrendszerünk második egyenlete felesleges, az enélkül felírt egyenletrendszernek ugyanazok a gyökei, mint az eredetinek.

Bogdán Zoltán, Cegléd
Kun Péter, Szentendre

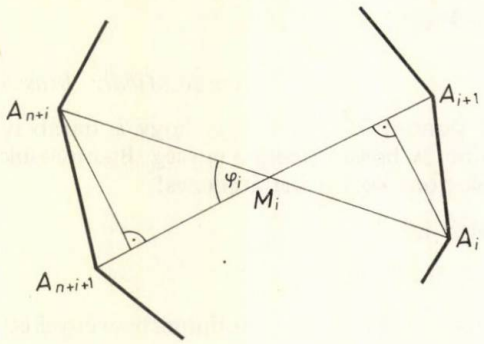
A megoldók száma: 35.

1012. Bizonyítsuk be, hogy az $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ konvex sokszögben fennáll a

$$k \geqq \sum_{i=1}^{n} A_iA_{n+i} \sin \varphi_i$$

reláció, ahol k a sokszög kerülete, φ_i pedig az A_iA_{n+i} és $A_{i+1}A_{n+i+1}$ átlók szöge!

Pataki János, Szatmár



1. ábra

Megoldás: Legyen az A_iA_{n+i} és az $A_{i+1}A_{n+i+1}$ átlók metszéspontja M_i. Ekkor $A_iM_iA_{i+1}\sphericalangle = A_{n+i}M_iA_{n+i+1}\sphericalangle = \varphi_i$. Mivel

$$A_iA_{n+i} = A_iM_i + M_iA_{n+i}, \quad \text{ezért}$$

$$A_iA_{n+i} \cdot \sin \varphi_i = \tag{1}$$

$$= A_iM_i \cdot \sin \varphi_i + M_iA_{n+i} \cdot \sin \varphi_i.$$

Az összeg tagjai az $A_iA_{i+1}M_i$, illetve az $A_{n+i}A_{n+i+1}M_i$ háromszögek A_i, illetve A_{n+i} csúcsához tartozó magasságai, ennélfogva

$$A_iM_i \cdot \sin \varphi_i \leqq A_iA_{i+1} \quad \text{és} \quad A_{n+i}M_i \cdot \sin \varphi_i \leqq A_{n+i}A_{n+i+1},$$

tehát (1) miatt

$$A_iA_{n+i} \cdot \sin \varphi_i \leqq A_iA_{i+1} + A_{n+i}A_{n+i+1},$$

amit összegezve

$$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{n+i} \sin \varphi \leqq \sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} + \sum_{i=1}^{n} A_{n+i}A_{n+i+1} = \sum_{i=1}^{2n} A_iA_{i+1} = k,$$

és ezt kellett igazolni.

Magyar Ákos, Budapest

A megoldók száma: 12.

1013. Az $a_n = n^2 + an + b$ (a, b adott egész számok) sorozatok közül határozzuk meg azokat, amelyeknek végtelen sok olyan tagja van, amely előállítható másik két tag szorzataként!

Giczi Margit, Sümeg

Megoldás: Megmutatjuk, hogy tetszőleges a, b egész számok esetén az $a_n = n^2 + an + b$ sorozatok mindegyike megfelel a feladat feltételeinek.

1. Tekintsük az $f(x) := x^2$ polinomfüggvényt.
   Nyilvánvaló, hogy $f(x) \cdot f(y) = f(xy)$ minden x, y valós számra.
2. Legyen most $f(x) := x^2 + k$.
   Ekkor $f(x+1) = (x+1)^2 + k$, tehát

$$f(x) \cdot f(x+1) = (x^2+k)(x^2+2x+k+1) = [(x^2+x+k)-x][(x^2+x+k)+x+1] =$$

$$= (x^2+x+k)^2 + (x^2+x+k)(x+1) - (x^2+x+k)x - x(x+1) =$$

$$= (x^2+x+k)^2 + x^2 + x + k - x^2 - x = (x^2+x+k)^2 + k = f(x^2+x+k)$$

bármely x, k valós számra.

3. Ha most $k = ax + b$, ahol a, b tetszőleges egész számok, akkor 2. miatt

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad \text{és} \quad f(x) \cdot f(x+1) = f(x^2 + (a+1)x + b).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$a_n = n^2 + an + b \quad \text{esetén} \quad a_n a_{n+1} = a_{n^2 + (a+1)n + b}, \quad \text{ha tehát például,}$$

$$n^2 + (a+1)n + b > n + 1,$$

akkor az a_n sorozat végtelen sok eleme áll elő a sorozat másik két elemének szorzataként. Még azt is biztosíthatjuk, hogy különböző elemek szerepeljenek az előállításban, hiszen a sorozat bizonyos indextől kezdve szigorúan monoton növekedő.

Bartha Gábor, Szentendre

A megoldók száma: 3.

1014. Ketten felváltva úgy húznak páratlan sok golyóból tetszés szerinti (pozitív egész) számú golyót, hogy minden húzáskor legfeljebb az eredeti golyószám felét veszik el. A játékot az nyeri, akinek — a golyók fogytával — páros sok golyója van. Van-e valamelyik játékosnak nyerőstratégiája?

Bogdán Zoltán, Cegléd

Megoldás: Két esettel foglalkozunk aszerint, hogy a golyók g száma néggyel osztva 1 vagy 3 maradékot ad.

1. Ha $g=2k+1$ és k páratlan, úgy mindkét játékos legfeljebb k darab golyót vehet el egyszerre. Legyen a kezdőhúzó A, a másodhúzó B.

Ha A elsőre k darab (tehát páratlan sok) golyót húz, akkor B válasza után legalább 1, de legfeljebb k darab golyó marad. Így A másodszorra attól függően, hogy B páros vagy páratlan sok golyót húzott egy kivételével valamennyi golyót elveszi, illetve egyetlen golyót sem hagy B-nek.

Ez esetben tehát A mindig nyer, hiszen B-nek páratlan sok golyója lesz.

2. Ha $g=2k+1$ és $k(>2)$ páros, akkor A először $k-2$ golyót vegyen el. Ha most B a maradék $k+3$ golyóból 3-nál többet és legfeljebb k darabot vesz el, akkor ha az így adódó maradék páros, A ezt mind felveszi, ha pedig páratlan, akkor 1 kivételével veszi fel A ezeket.

Ha B a maradék $k+3$ golyóból akár kettőt, akár hármat vesz el, úgy A k-t vegyen el, s ezzel nyert is.

Végül, ha B a maradék $k+3$ golyóból csak egyet vesz el, akkor másodjára A is csak egyet húzzon, s ezzel előállt az 1.-ben tárgyalt helyzet, hiszen a maradék $k+1$ golyóból most B kénytelen húzni és legalább egyet meghagyni. Ha tehát a maradék páros, akkor A egy kivételével valamennyit vegye el, ha pedig páratlan a maradék, úgy valamennyit fel kell vegye.

Ezzel beláttuk, hogy ha $g\geqq 3$ és $g\neq 5$, akkor mindig A nyer. A $g=1$ esetben A veszít. Ha $g=5$, akkor is A veszít, mert elsőre bármennyit is húzzon, B ugyanannyit fog húzni, s ezzel eléri, hogy A-nál 3 golyó legyen.

Medgyesi Zsuzsanna, Nagyrécse

A megoldók száma: 6.

1015. Bizonyítsuk be, hogy a tér egész koordinátájú pontjai közül kiválasztható négy pont úgy, hogy ezek a pontok egy szabályos tetraéder csúcsai legyenek!

Határozzuk meg a legkisebb térfogatú ilyen tetraéder élhosszát!

Bartha Gábor, Szentendre

Megoldás: Ismert, hogy a kocka szemköztes lapjainak egy-egy kitérő lapátlóján levő csúcsok egy szabályos tetraéder csúcsai (2. ábra). Következésképpen a térnek

$$A(1;0;0),\quad B(0;1;0),\quad C(0;0;1),\quad D(1;1;1)$$

pontjai egy $\sqrt{2}$ élhosszúságú szabályos tetraéder csúcsai.

A legkisebb térfogatú szabályos rácstetraéder egyúttal a legkisebb élhosszúságú is. Belátjuk, hogy a kockarácsban nincs a fentinél kisebb élű szabályos rácstetraéder.

Ha lenne kisebb élhosszúságú szabályos rácstetraéder, akkor ez csak egységélű lehet. Tekintsük ennek három csúcsát:

$$P(x_1;y_1;z_1),\quad Q(x_2;y_2;z_2),\quad R(x_3;y_3;z_3).$$

Ezekből:

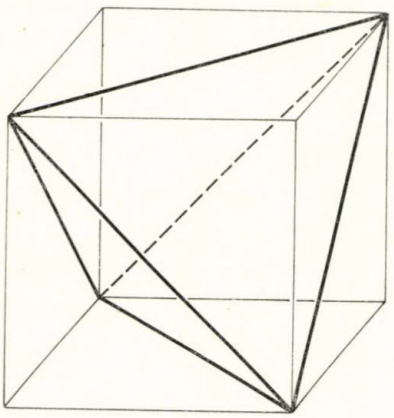
$$(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2=1,$$

$$(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2=1,$$

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=1.$$

Ha most az első kettő összegéből kivonjuk a harmadikat, akkor a bal oldalon páros számot. a jobb oldalon 1-et kapunk, ami ellentmondás.

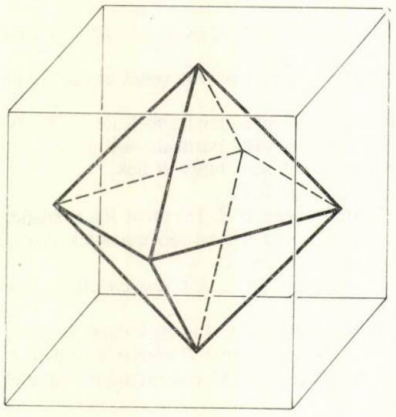
Kacsó Ferenc, Marosvásárhely



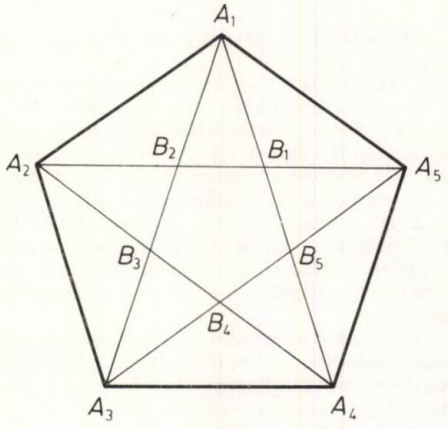
2. ábra

Megjegyzés: Ismert, hogy a négyzetrácsban semmilyen más szabályos rácssokszög nincs. (Lásd például: H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai. Műszaki Könyvkiadó, 1973.) Várható, hogy a térben né-

mileg változatosabb a lehetőségek köre. Mint előbb láttuk a kockarácsban van szabályos rácstetraéder, de ugyanúgy van szabályos rácsoktaéder is, hiszen egy kocka legközéppontjainak konvex burka szabályos oktaéder (3. ábra). Így egy páros élhosszú rácskocka lapközéppontjai rácspontok lévén, konvex burkuk a kívánt szabályos rácsoktaéder. A kockarácsban más szabályos rács-



3. ábra



4. ábra

poliéder nincs. Ha ugyanis volna szabályos rácsdodekaéder vagy ikozaéder, akkor volna szabályos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 rácsötszög is (4. ábra) Mivel a $B_1A_2A_3A_4$ paralelogramma A_2, A_3, A_4 csúcsai rácspontok, ezért B_1 is rácspont, és hasonlóan a többi B_i is. Tehát $B_1B_2B_3B_4B_5$ is rácsötszög. Ez azonban arra az ellentmondásra vezet, hogy létezik tetszőleges szakasznál is kisebb oldalú rácsötszög.

Bogdán Zoltán, Cegléd

A megoldók száma: 9.

1016. Tekintsük az

$$f(x)\cdot f(y) \leqq f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

relációnak eleget tevő, konstanstól különböző, valós együtthatós polinomfüggvények H halmazát! Bizonyítsuk be, hogy H minden elemének ugyanannyi valós zérushelye van!

Bartha Gábor, Szentendre

Megoldás: H-nak egyetlen, páros fokszámú polinomfüggvény sem lehet eleme. A páros fokszámú $f(x)$ polinomfüggvény ugyanis a legnagyobb fokú tagjának előjelétől függően minden határon túl nő, vagy csökken, tartson x akár $+\infty$, akár $-\infty$-hez. Eszerint bármely u értékhez található olyan v, hogy $x=u-v$, $y=u+v$ esetén az

$$f(x)\cdot f(y) > f^2\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad \text{fennálljon.}$$

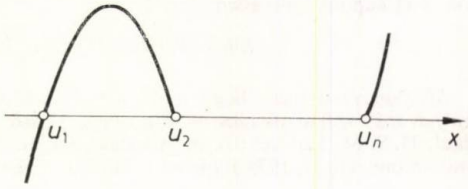
Eszerint tehát $f(x)$ páratlan fokszámú kell legyen, ezért $f(x)$-nek egy zérushelye van. Belátjuk, hogy több nem lehet.

Tegyük fel, hogy $f(x)$-nek egynél több valós zérushelye van. Legyen ezek között u_1, u_2 a két legkisebb és $u_1<u_2$.

Jelölje u_n $(2\leqq n$ és $u_2\leqq u_n)$ az $f(x)$ valós zérushelyei közül a legnagyobbat.

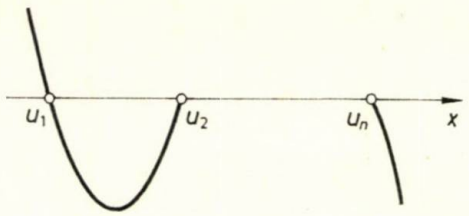
Ekkor az alábbi esetek lehetségesek:

1.*a)* $f(x) < 0$, ha $-\infty < x < u_1$,
$f(x) > 0$, ha $u_1 < x < u_2$,
$f(x) > 0$, ha $u_n < x < +\infty$,



5. ábra

b) $f(x) > 0$, ha $-\infty < x < u_1$,
$f(x) < 0$, ha $u_1 < x < u_2$,
$f(x) < 0$, ha $u_n < x < +\infty$.



6. ábra

Legyen ezekben az esetekben

$$u_1 < x < u_2, \quad u_n = \frac{x+y}{2},$$

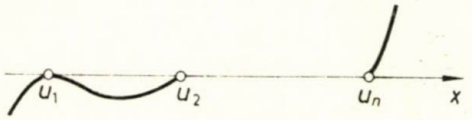
ezért

$$y = 2u_n - x > u_n.$$

Most

$$f(x) \cdot f(y) > 0 = f^2\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

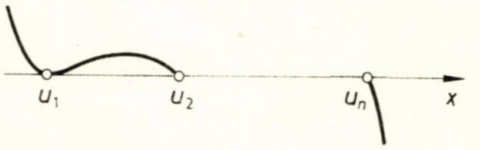
tehát $f(x)$ nem lehet H halmaznak eleme.



7. ábra

2.*a)* $f(x) < 0$, ha $-\infty < x < u_1$,
$f(x) < 0$, ha $u_1 < x < u_2$,
$f(x) > 0$, ha $u_n < x < +\infty$.

b) $f(x) > 0$, ha $-\infty < x < u_1$,
$f(x) > 0$, ha $u_1 < x < u_2$,
$f(x) < 0$, ha $u_n < x < +\infty$.



8. ábra

Ezekben az esetekben x és y értékét válasszuk meg az alábbiak szerint:

$$u_1 < x < u_2, \quad u_1 = \frac{x+y}{2}, \quad \text{amiből}$$

$$y = 2u_1 - x < u_1.$$

Könnyen látható, hogy ugyanúgy, mint az előbbi esetekben $f(x)$ nem lehet H eleme.

Mivel $f(x)$ előjelére vonatkozóan több lehetőség nincs, így beláttuk: ha $f(x)$ a feladat feltételét kielégítő függvények H halmazának eleme, akkor $f(x)$ olyan páratlan fokszámú polinomfüggvény, amelyek pontosan egy valós zérushelye van. Ez a zérushely lehet többszörös, például az $f(x)=x^3$ függvény esetében $x=0$ háromszoros zérushely és $x^3 \in H$.

A fenti feltételek szükségesek, de nem elégségesek.

Az $x \mapsto x^3 - x + 1$ polinomfüggvénynek egyetlen valós zérushelye van, de $f(0) \cdot f(1) = 1$ és $f^2\left(\frac{0+1}{2}\right) = \frac{25}{64} < 1$, azaz, $f(x) \notin H$.

Szántó Gyula, Gyula

A megoldók száma: 8.

A megoldók névsora (1011—1016.)

Ambrus Gabriella, Budapest (1011., 1012.); Bagi Gábor, Barcs (1011.); Bartha Gábor, Szentendre (1011., 1012., 1014—1016.); Bencze Mihály, Brassó (1011., 1012., 1016.); Bogdán Zoltán, Cegléd (1011—1016.); Csavar Magdolna, Ozsdola (1011.); Csorba Ferenc (1011., 1015.); Csörsz Sándor, Dunakeszi (1011.); Földváry József, Jármi (1011. két mód); Görbe László, Budapest, (1011.); Hárs-

patakiné Dékány Vera (1011).; Honti Dénes, Győr (1011., 1015., 1016.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1011., 1014., 1015.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (1011.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (1011. két mód, 1012., 1015., 1016.); Kiss Géza, Kunhegyes (1011., 1014.); Kun Péter, Szentendre (1011.); Magyar Ákos, Budapest (1011—1013., 1015., 1016.); Dr. Major Pál, Budapest (1011. két mód); Matekovics Mihály, Arad (1011., 1012.); Medgyesi Zsuzsanna, Nagyrécse (1011., 1014.); Mészáros József, Galánta (1011., 1015.); Nagy-Imecs Vilmos, Székelyudvarhely (1011.); Németh László, Vasvár (1011. két mód, 1012., 1015.); Polcz Katalin, Pécs (1011., 1012., 1014., 1016.); Rischákné Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (1011.); Róka Sándor, Nyíregyháza (1011. két mód); Schandl Gábor, Zalaegerszeg (1011.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1011.); Szánthó Gyula, Gyula (1011., 1012., 1016.); Szigeti Béláné, Győr (1011.); Unger János, Szeged (1011., 1014.); Varga István, Nagyszalonta (1011. két mód); Zalán Péterné, Budapest (1011., 1012.).

Lapunk 1982. évi legeredményesebb feladatmegoldóit könyvjutalomban részesítettük. A jutalmazottak:

Ambrus Gabriella, Budapest,
Bartha Gábor, Szentendre,
Bencze Mihály, Brassó,
Bogdán Zoltán, Cegléd,
Imolya Sándor, Hódmezővásárhely,
Kacsó Ferenc, Marosvásárhely,
Kamarás Lajos, Pécs,
Szánthó Gyula, Gyula,
Tuzson Zoltán Marosvásárhely,
Varga István, Nagyszalonta.

Javasolt szakirodalom
a Tankönyvkiadó kiadványai közül

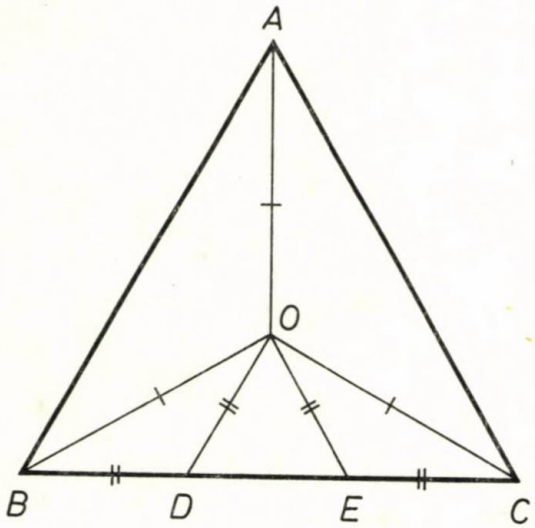
Cser—Imreczené—Pálfy: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos anyagának tanításához* (91 486)	31,50
Cser—Imreczené—Pálfy: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 8. osztályos anyagának tanításához* (91 491)	30,—
Egleszné—Kovácsné—Radnainé—Sztrókayné: *Tanári kézikönyv, általános iskola. Matematika 6.* (84 020)	39,—
Dr. Korányi Erzsébet: *Tanári kézikönyv, gimnázium. Matematika I—II.* (84 048)	31,—
Ligeti—Mosoni: *Törd a fejed, érdemes!* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (1908/1)	13,—
Hámori Miklós: *Halmazok. Matematikai logika* (1991)	9,—
Fried Ervin: *Oszthatóság és számrendszerek* (19 006)	11,—
Korovkin: *Egyenlőtlenségek* (29 238)	7,—
Máté László: *Sorozatok, sorok* (29 243)	11,50
Bognárné—Nemetz—Tusnády: *Ismerkedés a véletlennel* (29 253)	17,—
Lothar Berg: *Másodrendű differenciaegyenletek* (29 254)	10,—
Bereznai Gyula—dr. Varecza Árpád: *Tanárképző főiskolák matematika versenyei* II. 1971—1979. (8164/II)	21,—
Péter Rózsa: *Játék a végtelennel. Matematika kívülállóknak* (52 489)	31,—
Rédling Elemér: *Geometriai transzformációk* (52 783/II.)	21,50
Peller József—Megyesi László: *Függvények elemi vizsgálata* (52 783/III.)	24,50
Rédling Elemér: *Egybevágósági és hasonlósági transzformációk* (52 783/IV.)	21,—
Kalmár László: *Bevezetés a matematikai analízisbe* 1—2. kötet (52 808)	141,—
Lukács Ottó: *Operációkutatás* (52 899)	71,—
Dr. Lévárdi—Sain: *Matematikatörténeti feladatok* (52 913)	39,—
Így tanítjuk a matematikát I. (83 047/I.)	70,—
Így tanítjuk a matematikát II. (83 047/II.)	70,—

Beszerezhetők

a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 4. Tankönyvboltban (1051 Bp., Október 6. u. 8.)

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



983. augusztus * XXX. évfolyam 4 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211—200

83-2460 — Szegedi Nyomda — F.v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta
Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Cser Andor, 1907—1983 97
Dr. Varga Tamás: A függvényfogalom előkészítése II. 100
Dr. Koller Lászlóné: Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából (Kísérleti anyag, III. osztály 1. rész) 108
Garádi János: Tájékoztató a Középiskolások 1982. évi Számítástechnikai Versenyéről II. 112
Dr. Kántor Sándorné: A tanárképzés helyzete, problémái és fejlesztésének lehetőségei 117
Dr. Scharnitzky Viktor: A Hajós György Versenyről 122
FELADATOK 124

СОДЕРЖАНИЕ

Чер Андор, 1907—1983 97
Варга Тамаш: Подготовление понятия функции (II) 100
д-р Коллер Ласлоне: Система программных требований по математике для профтехучилищ (экспериментальный материал, кл. III, часть I) 108
Гаради Янош: О соревновании по ЭВМ учащихся средних школ 1982 г. II 112
д-р Кантор Шандорне: Положение, проблемы и возможности развития подготовки учителей 117
д-р Шарницки Виктор: О соревновании им. Хайоша Дьердя 122
ЗАДАЧИ 124

INHALT

Cser, Andor, 1907—1983 97
Dr. Varga, Tamás: Über die Vorbereitung des Funktionsbegriffes II. 100
Frau Marianne Koller (geb.: *Sátori*): Ein Anforderungssystem aus der Mathematik für die Berufsschulen (Versuchsmaterial, III. Klasse 1. Teil) 108
Garádi, János: Bericht über den Wettbewerb der Schüler der Mittelschulen in der Rechentechnik im Jahre 1982 II. 112
Frau Dr. Tünde Kántor (geb.: *Varga*): Die Situation, Probleme und Entwicklungsmöglichkeiten der Lehrerbildung 117
Dr. Scharnitzky, Viktor: Über den Hajós György Wettbewerb 122
AUFGABEN 124

Cser Andor

1907—1983

Amikor elhatároztam, hogy A Matematika Tanításának jubileuma alkalmából egy-egy rövid megemlékező cikk írására kérem fel a lap volt felelős szerkesztőit, nem gondoltam, nem hittem, hogy ez a sorozat megszakad, és Cser Andornak, a lap időrendben harmadik felelős szerkesztőjének ilyen jellegű írására már sohasem kerülhet sor.

Nem kerülhet rá sor, mert a kérlelhetetlen halál 1983. április 14-én kiragadta közülünk Cser Andort. Eltávozása nagyon gazdag és eredményes munkásságú élet után tett pontot. A következőkben megkíséreljük röviden vázolni ezt a rendkívül értékes életpályát.

Budapesten született 1907. október 31-én, akkori fogalmaknak megfelelően középosztálybeli családban. Alsó- és középfokú iskoláit is a fővárosban végezte. Szüleinek anyagi helyzete miatt már korán: 15 évesen instruktorkodásra kényszerült. Ezt a munkát azonban nemcsak szükségből végezte, hanem kedvtelésből is. Mint írta: „Tanítványaim sikerének talán még jobban örültem, mint a magaménak." Lehetséges, hogy ez irányította a tanári pályára.

Egyetemi tanulmányait a budapesti Pázmány Péter Tudományegyetemen végezte; itt szerzett 1931-ben matematika—fizika szakos középiskolai tanári oklevelet. Szinte természetes azonban, hogy az akkori gazdasági világválság miatt nem kapott mindjárt képesítésének megfelelő állást, hanem több, mint négy éven keresztül állástalan diplomásként malomellenőri feladatokat kellett ellátnia.

1936 szeptemberében a csurgói református gimnázium szolgálatába lépett mint internátusi nevelőtanár és óraadó tanár. Ebben az iskolában teljesített szolgálatot megszakítás nélkül 1949 szeptemberéig. Az 1937—38. tanév kezdetétől megbízást kapott az iskolához tartozó internátus vezetésére, egy évvel később a gimnázium helyettes, majd rendes tanárává nevezték ki. A gimnázium államosításakor a Vallás- és Közoktatásügyi Minisztérium állami gimnáziumi rendes tanárrá minősítette át.

1947-től 1949-ig vezette a gyékényesi parasztdolgozók gimnáziumát. Ugyanezekben az években a pécsi tankerületi főigazgatóság megbízta a Baranya, Somogy és Tolna megyei gimnáziumok, valamint a Somogy megyei általános iskolák matematika szakfelügyeletével.

1949 szeptemberében középiskolai előadónak osztották be a kaposvári tankerületi főigazgatóságra, majd ennek megszűntével Somogy megye Tanácsa V. B. oktatási osztályára.

1950 decemberétől 1952 végéig a VKM Nevelésügyi Főosztályán dolgozott mint főelőadó. Ebben a munkakörében a középiskolai matematikatankönyvek szerkesztésével foglalkozott. Ez idő alatt szerkesztésében jelentek meg a gimnáziumok II—IV. osztályos új tankönyvei is. A velük kapcsolatban végzett szerkesztői tevékenységére egész életében büszke volt. E munkahelyén ismerkedett meg egyrészt a modern szovjet szakmódszertani irodalommal, másrészt több kiváló hazai, matematikát oktató pedagógussal. Ez az ismeretség nagymértékben szélesítette a módszertan területén azt a látóhatárt, amelyet csurgói gyakorlati működése során alakított ki. Ekkor kezdte meg a módszertan alkotó módon való művelését, amit a pedagógiai sajtóban megjelent ilyen jellegű cikkei is tanúsítanak.

Az 1952—53. tanévben matematikát tanított a Gazdasági és Műszaki Akadémián. 1953. január 1-ével a tankönyvek szerkesztésének feladata átkerült a Tankönyvkiadó Vállalathoz. Cser Andor ekkor a Felsőoktatási Minisztérium Tudományegyetemi

Főosztályára nyert főelőadói beosztást. Munkaterülete a tudományegyetemi matematika és fizika oktatása volt. Bár ez a beosztása bizonyos fokig kitérést jelentett pályáján, arra azonban nagyon hasznosnak bizonyult, hogy megismerkedjék a felsőfokú oktatás problémáival, amelyek természetszerűleg összefüggenek a középfokú oktatással, ezért elősegítették látókörének további bővülését. Az 1953—54. tanév I. félévében algebrát, II. félévében geometriát adott elő az Eötvös Loránd Tudományegyetem esti tagozatán.

1954. október 1-ével új fejlődési lehetőség nyílt meg Cser Andor számára: meghívták az akkor létesített Pedagógiai Tudományos Intézet tudományos munkatársának. Örömmel fogadta el ezt a meghívást és ott dolgozott egészen az Intézet megszűntéig. Munkájának középpontjában ebben az időszakban a tantervkészítésre való felkészülés és az általános iskolai matematika-tanterv elkészítése állt. Emellett a PTI-ben megindult a tudományos igényű módszertani kutatómunka. Ennek keretében részt vett annak a munkacsoportnak tevékenységében, amely a tanulói aktivitás helyzetképének felderítésére vállalkozott. E munkához tanulmányával járult hozzá. Ezenkívül számos önálló kutatást, megfigyelést és kísérletet végzett a PTI-ben, amelyekről cikkekben, tanulmányokban számolt be; számuk több, mint 20. Egyik kísérlete alapján dolgozta ki a társszerzőkkel írt Matematikai Zsebkönyv analízissel foglalkozó fejezetét. Egyik, ugyancsak társszerzővel írt dolgozata megjelent a szovjet módszertani folyóiratban, a Matematika v skole-ban.

1962. szeptember 1-én a Központi Pedagógus Továbbképző Intézet és a PTI összevonásával megalakult a főiskolai státusú Országos Pedagógiai Intézet, amelynek Matematika Tanszékén Cser Andor előbb mint főiskolai docens, később mint főiskolai tanár dolgozik, majd tanszékvezetőjének halála után megbízást kap a tanszék vezetésére; ezt a munkakörét nyugállományba vonulásáig: 1973. december 31-ig betölti. Véleménye szerint az új intézmény adta meg neki azt a lehetőséget, hogy feladatai teljesek legyenek és — amennyire képességei engedik — betetőzze munkáját. Az OPI-ban ugyanis korábbi munkaterületei kiegészültek a tanári továbbképzésével, ami szorosan hozzátartozik a módszertan problematikájához.

Csak dióhéjban az OPI-ban végzett leglényegesebb munkáiról:

Először az iskolareformmal kapcsolatos dokumentumokkal foglalkozott, majd átvette A Matematika Tanítása című módszertani folyóirat szerkesztését és részt vett a tanári továbbképzés irányításában. Ezek után létrehozta az Országos Matematikai Módszertani Bizottságot, amelynek az volt a célkitűzése, hogy az OPI feladatainak megfelelően közös mederbe terelje, közös irányítás alá vegye, összehangolja az országban folyó matematika-módszertani kutatásokat. A Bizottság által kijelölt négy fő terület: 1. az oktatási és nevelési feladatok; 2. a gondolkodás fejlődésének lélektana; 3. a szoros értelemben vett módszertan és 4. a tanári továbbképzés területe felöleli a matematika pedagógiájának egészét. Bár Cser Andor az említett négy terület mindegyikén dolgozott, legközelebb azonban a 2. és 3. terület állt hozzá. Ezeken foglalkozott a tanulók elbírálásának, a tanulás motivációinak és a tanulás technikájának problémáival.

Az OPI Matematika Tanszéke az 1963—64. tanévtől kezdve kísérletet indított korszerű általános iskolai matematika-tanterv gyakorlati megalapozására. Ebbe a kísérletbe évek során egyre több általános iskola kapcsolódott be. Ez az ún. komplex matematikatanítási kísérlet lett azután tapasztalati bázisa az 1974-től lépcsőzetesen bevezetett ideiglenes matematika-tantervnek, amely 1978 őszén újabb, de már nem lényeges átdolgozás után került bevezetésre felmenő rendszerrel mint a magyarországi általános iskolák új matematika-tanterve. Bár Cser Andornak jelentékeny szerepe volt ennek a tantervnek folyamatos kialakításában is, de még több munkával járult

hozzá a régi alsó tagozatos számtan-mértan tantervre épített, korábban „átmenetinek" nevezett felső tagozatos matematika-tanterv és a hozzá csatlakozó tanulói, valamint tanári dokumentumok kidolgozásához. Ennek a munkának nagy részét már nyugdíjasként végezte el. Az „átmeneti" tantervnek az alsó tagozatos ideiglenes matematika-tantervvel egy időben történt lépcsőzetes bevezetése különben az általános iskolai matematikaoktatás korszerűsítési folyamatának meggyorsítását célozta, mégpedig azt, hogy olyan tanulók is megismerkedhessenek a felső tagozaton a korszerű matematika elemeivel, akik az alsó tagozatban még a régi számtan-mértan tanterv szerint tanultak.

Nehogy bárki is azt gondolja: az előbbiekkel minden lényegeset elmondtunk Cser Andor matematikai, főképpen pedig matematikamódszertani munkásságáról! Azt semmiképpen nem vállalhatjuk, hogy jelen sorainkkal teljességre törekedjünk ebben a vonatkozásban, de feltétlenül meg kell említenünk, hogy szakirodalmi tevékenysége kiterjedt szinte minden általános és középiskolai iskolatípusra, iskolafokozatra, nappali és esti-levelező tagozatra egyaránt. Hasonlóképpen szólnunk kell arról is, hogy a szerkesztésében megjelent A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése c. könyv — amelyből két kiadás is napvilágot látott — hazánkban egyedülálló a maga nemében.

Cser Andor munkáját magas fokú tudományos igényesség jellemzi. Tanulmányai, cikkei kitűnnek logikus okfejtésükkel és világos megfogalmazásukkal. Munkaterületén jó kapcsolatokat épített ki a szaktudományokat képviselő személyekkel és szervezetekkel a matematika, pedagógia és pszichológia területén egyaránt.

Munkafegyelme példamutató volt. Azontúl, hogy nagyon szerette intézeti munkáját, jelentős mennyiségű többletfeladatot is vállalt. Így hosszabb időn keresztül tagja volt Budapest főváros V. kerületi Tanácsának, ahol tanácstagi megbízatása mellett a Tanács beválasztotta a Művelődésügyi és Ifjúságpolitikai Bizottságba is.

Az intézeti közéletben szerény, kissé visszahúzódó természete miatt csak kisebb mértékben vállalt szerepet. Ha azonban felkérték valamire vagy megbízták valamivel, akkor igen lelkiismeretesen és kifogástalanul végzett el még olyan feladatokat is, amelyek távol estek szaktudományától. Gondolatgazdagságához nem mindig párosult megfelelő vitakészség; álláspontját inkább csak kérésre, felszólításra fejtette ki. Ennek oka részben igen nagy fegyelmezettsége volt, részben határozott törekvése a feladatok konstruktív végrehajtására, végül pedig általános zárkózottsága.

Tanszékvezetésére jellemző volt a feladatok arányos elosztása, munkatársainak segítése, a velük való tapintatos bánásmód, körültekintő munkaszervezés és nagyfokú gondosság.

Az OPI-ban sok barátot szerzett ügyszeretetével, segítőkészségével, munkatársaihoz való igen jó viszonyával. Egyike volt az Intézet legmegbecsültebb, legtekintélyesebb munkatársainak.

Cser Andor munkásságát többször ismerték el állami, illetve társadalmi kitüntetéssel: 1961-ben az Oktatásügy Kiváló Dolgozója lett, 1965-ben megkapta a Munka Érdemrend bronz fokozatát, 1967-ben a Bolyai János Matematikai Társulat Beke Manó emlékdíját, nyugállományba vonulásakor pedig a Munka Érdemrend ezüst fokozatát.

Az előbbiekben leírtak alapján úgy tűnik, hogy Cser Andor érdemei, erényei még fényesebben csillognak, mint kapott kitüntetései. Mi — volt munkatársai — mindenesetre dolgos életét, ebben elért eredményeit, érdemeit és erényeit idézzük fel; így őrizzük meg emlékét.

Hódi Endre

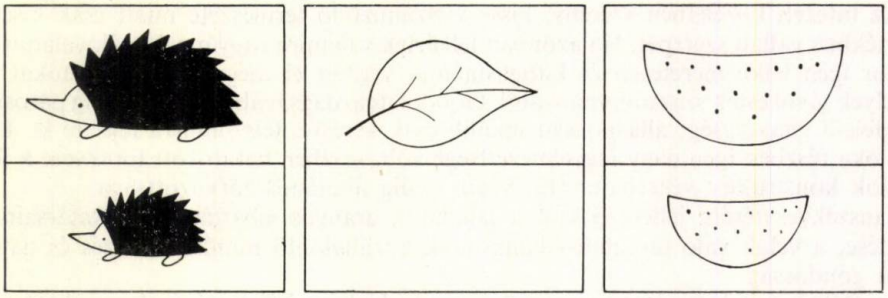
DR. VARGA TAMÁS
főmunkatárs
Országos Pedagógiai Intézet

A függvényfogalom előkészítése II.

Az oktatásban való hasznosítás közben azonban súlyos nehézségekkel kell szembenéznünk. Ilyenek az egy osztályba kerülő tanulók fejlettségbeli különbségei; fejlettségüktől függetlenül is eltérő ismereteik, tapasztalataik; az a tény, hogy a tanító ezekről keveset tud, és ezeket kevéssé is képes tekintetbe venni, különösen, ha nagy létszámú osztályban tanít. Pedagógiai kultúra és egyéni rátermettség kérdése is, hogy ki mennyire képes megbírkózni ezekkel a nehézségekkel. Nem könnyű elérni, hogy az oktatás *ne vesse vissza, hanem inkább segítse* lehetőleg minden tanuló matematikai képességei fejlődésének már az iskoláskor előtt elkezdődött természetes folyamatát. Ennek néhány lehetőségét mutatom most be, a függvényfogalom vonatkozásába, főként olyan példákon, amelyeket általános iskoláink 1—8. osztályos munkalapjaiból merítek.

A) Nem numerikus függvények.

A_1) Rajzolj az üres részbe!



A_2) Az első szótagra tegyél gondolatban ékezetet! Írd le a szót, amit így kaptál!

kerek → kérek kar →

merek → haza →

A_3)

ló	tehén	tyúk	
csikó	borjú		bocs

Az ilyen feladatokon át a gyerekek a tág értelemben vett függvénynek a táblázatos megjelenési formájával tevékenykednek, ismerkednek:

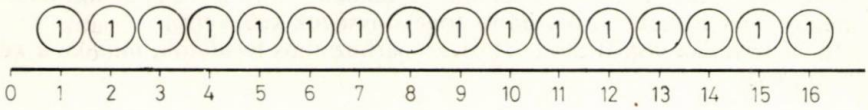
a) Egy vízszintes vagy egy függőleges vonal egyik oldalán vannak a bemenő információk, másik oldalán a kijövő információk.

b) A vonal két oldalán egymással szemben levő rajzos, szöveges stb. információk mindig egyformán felelnek meg egymásnak. Például itt lent ugyanaz van kicsiben, mint fönt nagyban vagy a fönt felsorolt állatok kicsinyeinek a neve olvasható lent az állat neve alatt.

c) Az ilyen táblázatokat ki lehet egészíteni úgy, hogy a bemenő információhoz keresik a tanulók a megfelelő kijövő információt, vagy kereshetik a kijövőhöz a bemenőt, vagy kereshetnek összetartozó párokat. Arra, hogy meg is fogalmazzák, mi a megfelelés „szabálya" rendszerint utólag kerül sor.

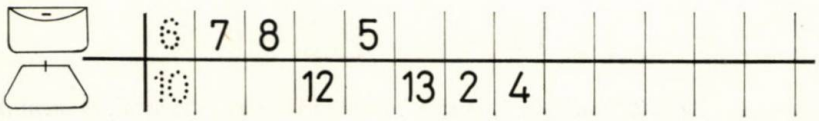
B) Történettel megadott numerikus függvények.

B_1) Kati erszényében és Zsuzsiéban összesen 16 Ft van.



Hány forintja lehet Katinak? Hány forintja lehet Zsuzsinak?

Keress több megoldást!

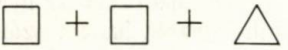


B_2) Ebben a két dobozban összesen 16 gomb van. Melyikben mennyi lehet?

Ha ebben □ ennyi van:	11	6	8	5						
akkor ebben ⌒ ennyi van:	5				2					

A két — szövegétől eltekintve egyező — összefüggés közül az elsőt rajzról is, a másodikat egyenletről is leolvashatják a tanulók. Az egyenletben az ismeretlenek (változók) keretjelöléssel szerepelnek. A tanulók megtanulják a következő technikát: beírnak a két keretbe egy számpárt — mindkét keretbe egy-egy számot —, és ha a felírt állítás igaz, akkor a két számot beírják a táblázatba is. *A szöveg sugallja azt a megállapodást, hogy a különböző keretekbe egyenlő számokat is be lehet írni* (a két dobozban lehet ugyanannyi gomb: mindkettőben 8). A táblázat kitöltésekor ismét előfordulnak az *A)* pontban felsorolt *a), b), c)* változatok.

C) Történet nélkül, kétváltozós egyenlettel megadott függvény. Írd be a hiányzó számokat!



□	3	4	1	2	5								
△	6	4				4	0	2	7	8	9	6	

Mint az előbb, úgy itt is szabad ugyanazt a számot írni be különböző keretekbe (szabad mindhárom keretbe 4-et írni), de egy másik megállapodással is megismerkednek itt a tanulók: *egyforma* keretekbe *csak egyenlő* számokat szabad beírni. (Például 1, 2 és 9 nem kerülhet ezekbe a keretekbe, de 1, 1 és 10 vagy 2, 2 és 8 igen.)

A változók használatát ez a két megállapodás szabályozza. A két megállapodás független attól, hogy a változókat az ábécé végéről vett, jelentést nem hordozó betűkkel jelöljük-e, vagy a jelölt mennyiségekre utaló betűkkel (pl. kezdőbetűkkel), vagy pedig a változók „kitöltendő hely" jellegét sugalló kereteket alkalmazunk; az utóbbiak szintén lehetnek teljesen önkényesek, vagy utalhatnak alakukkal a változók jelentésére.

A két megállapodás helyes alkalmazása a matematika alapvető technikái közé tartozik. Korai elsajátítása számottevő nehézségbe a tanulók részéről nem ütközik. (Nehézség tapasztalható olykor a pedagógusok részéről, akik a két megállapodással és az ebből következő technikával tanulmányaiknak abban a szakaszában találkoztak, amikor már a matematika iránti fogékonyságuk csökkent.)

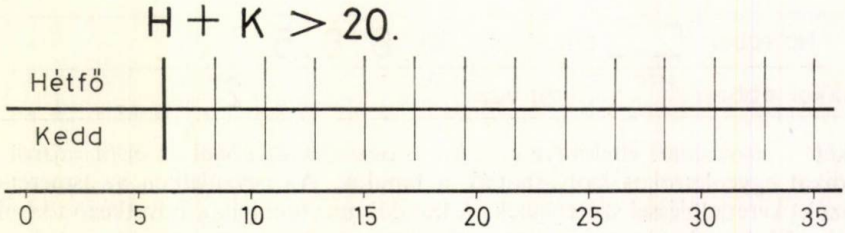
Segítik a technika elsajátítását az olyan párhuzamos feladatok, mint ez a kettő: Igaz legyen!

a) □ + △ = 16,

b) ⬠ + ⬠ = 16. ⬠ =

D) Olyan képlet (nyitott mondat), amely kétváltozós (binér) reláció, de nem ad meg függvényt.

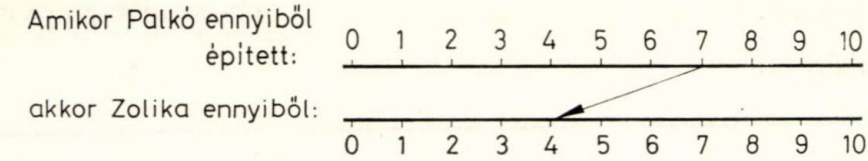
Tomiék hétfőn és kedden 20 km-nél nagyobb utat tettek meg.
Hány kilométer utat tehettek meg hétfőn, mennyit kedden?



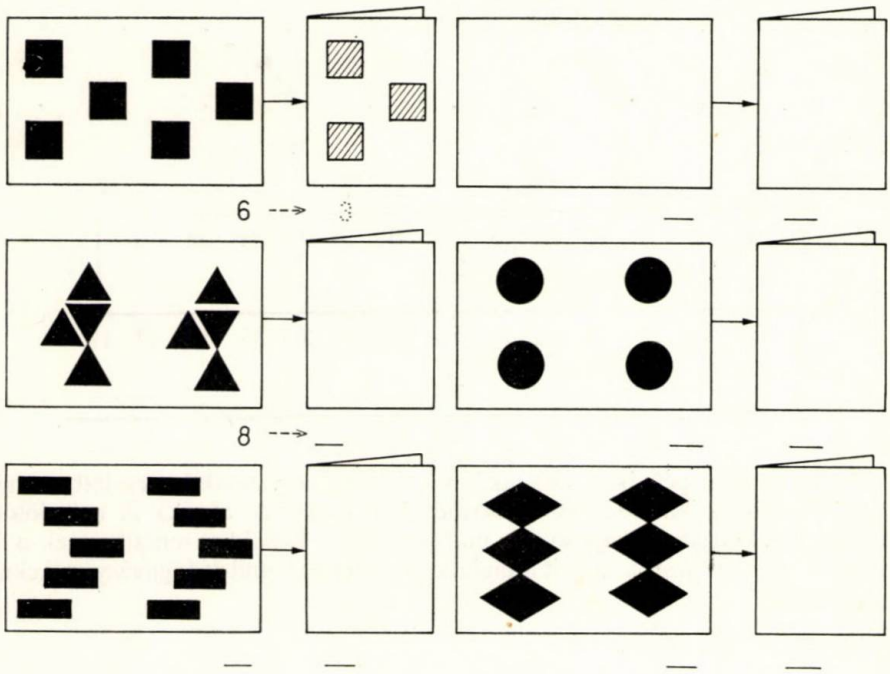
A számegyenes szemléleti támaszt ad a megoldáshoz. A rajta feltüntetett számok sugallják az olyan egyszerű megoldásokat, hogy pl. a megtett út 25 vagy 30 vagy 35 km, és ebből a hétfőn megtett út 5, 10, 15 vagy 20 km. Függvényt is megadhat ez az egyenlőtlenség, ha a kijövő (output) információk nem számok, hanem számhalmazok. Ennek a feladatnak azonban nem célja az ilyen irányú általánosítás. A táblázat második sorába nem számhalmazok, hanem számok kerülnek, s ezeket a fölöttük levő számokhoz nem tudjuk egyértelműen hozzárendelni.

E) Függvénykapcsolat nyíllal való ábrázolása, illetve jelölése.

1. Zolika mindig 3-mal kevesebb kockából épített tornyot, mint Palkó.



2. Rajzold le, hogy mit látsz a képből, ha félbehajtod a kártyát! Írd alá, hogy hányat látsz!



A nyitott mondattal (pl. kétváltozós egyenlettel) való felírás *relációt* fejez ki a két változó közt. Ez még akkor is így igaz, ha az egyik vagy mindkét irányú egyértékűség miatt függvénykapcsolatot is megadhatunk az egyenlettel, akár implicit módon (pl. $x+y=16$), akár különválasztva a függvényértéket jelentő változót (pl. $y=16-x$). A nyíljelölés azonban korszerűbb és kifejezőbb, ezért kár volna lényegesen későbbre hagyni. Az idézett feladatok közül az egyik grafikusan, a másik szimbolikusan vezeti be a nyíljelölést egy-egy olyan függvényre, amelyet később

$$x \mapsto x-3,$$

illetve

$$x \mapsto x/2$$

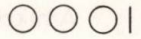
módon is megtanulnak majd leírni. (A tárgy- és képhalmaz tudatosítása is későbbre marad.)

F) Sorozatok.

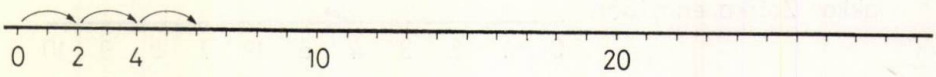
1. Folytasd! Színezd!

2. Folytasd!

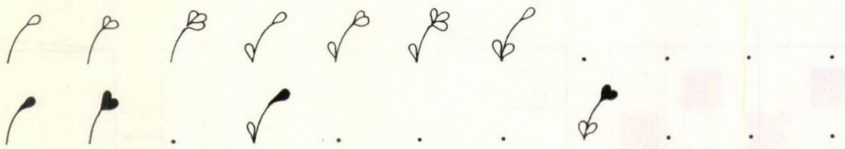
3. Folytasd!



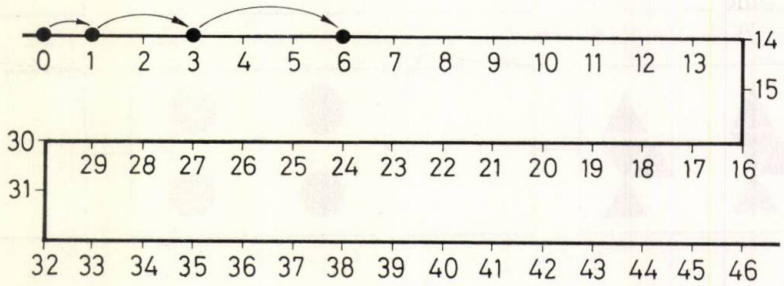
4. Folytasd!



5. Rajzold oda, ami kimarad!

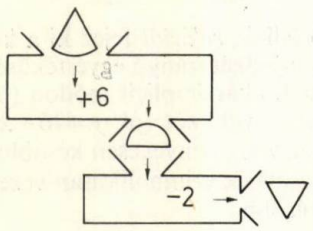


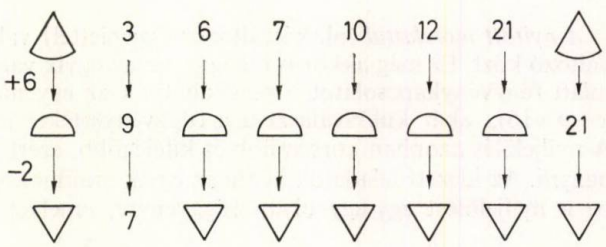
6. Folytasd!



A nem numerikus példák is valamiképpen számokkal vannak kapcsolatban (mindig eggyel több karika stb., négyes periódusban ismétlődő ábrák). A nyíljelölés a függvénnyel való egyfajta kapcsolatra utal (rekurzió). Később marad annak a felismerése, hogy a sorozatok tagjait a tagindex-értékekhez rendelt függvényértékeknek is tekinthetjük.

G) Függvények összetétele.

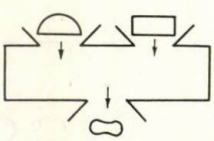




Az alapgondolat itt az, hogy a két gép egyetlen géppel helyettesíthető. Az adott esetben ez ugyanolyan egyszerű, mint az eredeti két gép (szabálya röviden írva: +4).

H) Kétbemenetű gépek (kétváltozós függvények).

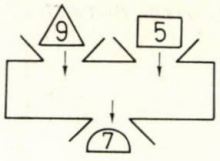
1.



⌓	2	4	7	9	8	10	3		
▭	3	6	3	5	2	4		6	
⬭	7	25	22				28	31	50

2.

△	9	2	5	0	8	15	21	102	102
□	5	6	3	10	10	3	3	0	
⌓	7	4	4						101



Az alsós diákok számára a legegyszerűbbek az *egyműveletes* kétváltozós függvények, amelyek a két bemenő számot összeadják, összeszorozzák vagy egyikből a másikat kivonják (az osztás már nehezebb eset). A fenti függvények nem ilyenek. A két bemenő számon kívül felhasználnak egy explicite meg nem jelenő, „titokban tárolt" számot is. A tanulók feladata felismerni, hogy például az első gép a bemenő számok szorzatához hozzáadja a „titokban tárolt" 1-et. A második gép szabályát is leírhatják hasonló módon: a bemenő számok összegét a gép felezi (2-vel osztja).

Mint minden szabályt, le lehet ezt írni több más módon is. Nem is csak műveletekkel kifejezve (összeadás és felezés), hanem pl. úgy is, hogy a kijövő szám a számegyenesen pontosan középütt van a két bemenő szám közt. Művelettel is le lehet írni a szabályt más módon, pl. (a „be 2 és 6, ki 4" számokra gondolva) így: „vedd mindkét bemenő számnak a felét, és ezeket add össze". Ez beválik a megadott másik két számhármasra is, ha nem maradunk az egész számok körében (pl. 9-nek a fele 4 és fél, 5-nek a fele 2 és fél, 4 és fél meg 2 és fél pedig együtt 7.)

Más ideillő számhármasok egyéb szabályokat is sugalhatnak. Például a

be 600 és 588, ki 594

számhármasról az juthat valakinek az eszébe, hogy a két szám különbségének a felét levonjuk az első számból vagy hozzáadjuk a második számhoz.

Mindezek a szabályok *ugyanazt a függvényt* adják meg más-más formában. Egy vagy akár több bemenő számból és a megfelelő kijövő számokból azonban *sohasem következik egyértelműen a hozzárendelés szabálya.* A tanulók feladata ezért sohasem az, hogy keressék meg „a szabályt" (azt, amire a tankönyvszerző vagy a pedagógus gondolt), hanem, hogy *keressenek egy — vagy akár több — olyan szabályt,* amely mindegyik megadott számpárra (számhármasra stb.) érvényes: a bemenő adatokból mindig a hozzájuk tartozó számhoz vezet.

Ha csak egyetlen bemenő számhoz (számpárhoz stb.) adjuk meg a megfelelő kijövő számot, akkor a tanulók szabályok sokaságát találhatják ki. A „be 2, ki 8" számpárhoz többek közt ezeket:

$$\text{be}+6=\text{ki}, \qquad \text{be}\cdot 2+4=\text{ki},$$

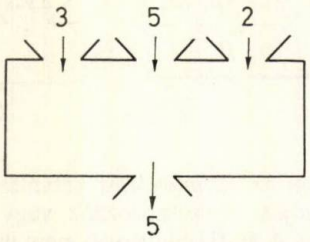
$$\text{be}\cdot 4=\text{ki}, \qquad \text{be}\cdot 3+2=\text{ki},$$

$$\text{be}+\text{ki}=10, \qquad \text{be}\cdot 5-2=\text{ki},$$

$$\text{be}\cdot\text{ki}=16, \qquad \text{be}\cdot 10-12=\text{ki}.$$

Ez csupa különböző szabály, mert pl., ha 4-et viszünk be, akkor más-más lesz a kijövő szám: sorra 10, 16, 6, 4, 12, 14, 18, 28. Mindegyik szabályt kifejezhetik több más alakban, pl. az elsőt így is: $\text{ki}-\text{be}=6$, vagy akár így: $\text{be}+3=\text{ki}-3$. Egy és ugyanazon függvény többféle leírásmódjának összehasonlítása az algebra fontos technikáinak válhat kiindulópontjává (egyenletmegoldás, azonos átalakítások).

I) Nem műveletekből alkotott szabály.



3	5	2 →	5
14	2	56 →	56
13	105	21 →	___
42	45	46 →	___
39	41	48 →	___

Hasonló jellegű szabályok: három szám közül a legkisebb; nagyság szerint a középső; az első, az utolsó, sorrendre a középső, hasonlóan $2n+1$ szám közül; $2n$ szám közül a nagyság szerint középső kettőnek a számtani közepe; egy szám n-esben a leggyakrabban előforduló szám (ha egy ilyen van).

J) Tapasztalati függvények

Ilyen függvény például a testmagasság változása az életkorral, gumiszalag vagy rugó megnyúlása a terheléstől, labda visszapattanási magassága az ejtési távolságtól függően, hőmérsékletnek vagy autó sebességnek időbeli változása, termelési, demográfiai, egyéb statisztikai adatok, kártyakeverés, lottóhúzás, kockadobás eredményei ... Ilyen függvényekkel találkozik naponta többször (sokszor) minden iskolázott, vagy nem iskolázott ember munka, szórakozás, újságolvasás, beszélgetés közben, akkor is, ha a „függvény" szót soha nem is használja. A matematikailag leírható szabállyal megadható függvények olyan gondolati modellek, amelyek részben közvetlenül alkalmazhatók a valóság közelítő leírására (pl. a megnyúlás mint a terhelés lineáris függvénye), részben olyan fogalmak kialakításához, általánosításokhoz, matematikai felismerésekhez vezetnek, amelyeknek szintén szerepe lehet az alkalmazásokban. Matematikaórán — éppen az alkalmazással való kapcsolatok érdekében — nemcsak a matematikai modellek bő változatosságával ismertetjük meg a tanulókat, hanem tapasztalati függvények vizsgálatával is foglalkozunk: keressük a bennük tükröződő részleges szabályosságokat.

Erre egy példa a napi középhőmérséklet százéves átlagára vonatkozó alábbi táblázat-részlet:

Nap	Január	Február	Március	Április	Május
1	−0,8	−0,3	3,2	9,2	14,0
2	−1,2	−0,1	3,1	9,0	14,4
3	−0,8	−0,1	3,2	9,2	14,8
4	−0,8	0,0	3,0	9,5	14,5
5	−1,1	0,1	3,7	10,0	14,3
6	−0,9	−0,2	3,7	9,9	14,7
7	−0,7	−0,3	4,1	10,0	15,2
8	−0,9	−0,3	4,0	9,7	15,4
9	−1,2	0,1	4,1	9,5	15,3
10	−1,4	−0,1	4,4	9,8	15,2
11	−1,3	0,1	4,4	10,2	15,0
12	−1,5	0,4	4,4	10,7	15,6
13	−1,5	0,1	4,3	10,6	15,6
14	−1,3	0,0	4,5	11,1	16,0
15	−1,3	0,1	4,8	11,7	16,6
16	−1,1	0,2	5,1	11,8	16,7
17	−0,8	0,6	5,3	11,8	17,0
18	−1,1	1,0	6,0	11,5	16,9

Nap	Január	Február	Március	Április	Május
19	-0,9	0,9	6,1	11,9	16,8
20	-1,2	1,4	6,4	12,2	16,3
21	-1,4	1,4	6,5	12,5	16,7
22	-1,7	1,5	6,7	12,5	16,7
23	-1,8	1,9	6,7	12,5	17,0
24	-1,5	2,0	7,2	13,0	17,5
25	-1,6	2,0	7,8	13,1	17,7
26	-1,0	2,2	7,9	13,3	17,9
27	-1,3	2,8	8,3	13,2	18,1
28	-1,3	3,1	8,4	13,5	18,4
29	-1,2	2,6	8,3	13,6	18,5
30	-0,9	—	8,8	14,0	18,4
31	-0,6	—	8,9	—	18,8

A tanulók megfigyelhetik például a következőket:

1. Az itt szereplő öt hónap közül a január a leghidegebb, melegebb a február..., a legmelegebb a május. Saját tapasztalataikkal, maguk és mások emlékeivel összehasonlítva megállapíthatják, hogy ez nincs mindig így: van olyan év, amikor pl. hidegebb a február, mint a január. A táblázatbeli adatok és az ilyen tapasztalatok egybevetése segíti őket, hogy jobban megértsék, mit jelent az *átlag*, itt a százéves átlag.

2. Hallhattak a tanulók májusi fagyokról, fagyos szentekről (Pongrác, Szervác, Bonifác: május 12, 13, 14). A táblázatban azonban ezeken a napokon nincsenek negatív hőmérsékleti adatok. Annak sincs nyoma, hogy ekkortájt számottevően csökkenne a hőmérséklet, vagy akár megtorpanna a fokozatos felmelegedés. Az ellentmondás feloldódik, ha meggondolják, hogy a táblázatban a *napi átlaghőmérsékletek* százéves átlaga szerepel, a májusi fagyok viszont *hajnali* fagyok. Derült időben hajnalra lehűl a levegő (nincs felhőtakaró!), de utána a napsugarak hatására gyorsan fölmelegszik. *A napi átlag már nem mutatja, hogy hajnalban fagyott.*

3. Arról is bizonyára hallottak a gyerekek, hogy „Sándor, József, Benedek zsákban hozzák a meleget". Melegebbre fordul-e az idő ezeken a napokon (március 18, 19, 21)? Az így feltett kérdés megválaszolásában tág tere van a tanulók ötleteinek, megfigyeléseinek, számítgatásaiknak:

a) Észrevehetik, hogy 18-án az előző naphoz képest 0,7 fokkal magasabb a hőmérséklet százéves átlaga.

b) Ennél nagyobb emelkedés januártól márciusig nincs is.

c) Ekkora emelkedés azonban máskor is van: március 4-étől 5-ére.

d) Igen ám, de 3-áról 4-ére csökken az átlaghőmérséklet, 5-éről 6-ára pedig abbamarad a növekedés (marad a 3,7 °C), így akkor három napon át (3-ától 6-áig) együtt csak 0,5 °C az emelkedés.

e) Mennyi 17-étől számítva a három napos emelkedés? 1,1 °C.

f) Sok ez? Ekkora változásra máskor is van példa: február 25-étől 28-áig, március 4-étől 7-éig.

g) A három napra számított növekedés Sándor naptól kezdve már csak 0,5 °C, utána 0,6 °C, 0,3 °C.

h) Ha három nap helyett egész heteket nézünk, pl. március 1-től 8-áig (0,8 °C), innen 15-éig (0,8 °C), 22-éig (1,9 °C) 29-éig (1,6 °C) akkor mégis azt látjuk: *a* négy hét közül azalatt melegszik az idő a legjobban, amikorra Sándor, József és Benedek esik.

i) Emelkedik-e márciusban valamikor egy hét alatt 1,9 °C-nál többet is a hőmérséklet százéves átlaga? Igen, pl. 13-ától 20-áig 2,1 °C-ot. Sándor és József ebben a hétben is benne van!

j) Hát más hónapokban?...

Ez a függvénytáblázat a 4. osztályos tanulók munkafüzetében található. A táblázat tanulmányozása közben a tanulók tizedes törtekkel végeznek olyan műveleteket (kivonásokat), amelyek életkorukhoz és előismereteikhez mértek. Természetes módon merül fel a negatív számok használata hőmérséklet*változások* kifejezésére is: negatív számmal írjuk le, hogy mennyivel *csökkent* a hőmérséklet két időpont közt. Maguk a hőmérsékletek is lehetnek pozitívak vagy negatívak. A függvénytáblázat vizsgálata közben fel is lép minden olyan kombináció, amely pozitív és negatív számok kivonásakor egyáltalán felléphet. Olyan összefüggésben találkoznak velük a tanulók, amelyben fel sem merül, hogy önkényes megállapodásról van szó. *A megállapodások a feladat természetéből következnek.* Megállapodás voltuk belátása sokkal később, a matematikai érettség lényegesen magasabb fokán válhat csak esedékessé.

Az ismertetett példákban csak a 4. osztályig jutottam. Témám is csupán a függvényfogalom *előkészítése* volt. Bármilyen széles körből igyekeztem összeválogatni a példákat, a függvényfogalom előkészítésének számos vonatkozására nem tudtam figyelemmel lenni. Példáimmal remélhetőleg így is rá tudtam világítani arra, mennyire középponti szerepe van még az embrionális függvényfogalomnak is a matematika különféle ágaiban és alkalmazási területein.

DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ
főelőadó
Országos Pedagógiai Intézet

Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából

(Kísérleti anyag; III. osztály 1. rész)

Az első és második évfolyam követelményrendszerét már közöltük A Matematika Tanítása 1979. 5., 1980. 1; 1981. 4. és 1982. 1. számában.

Az első évfolyam követelményrendszerének „Bevezetésében" kifejtett általános nevelési célkitűzések természetesen a harmadik évfolyamon is érvényesek. A másodikos követelményrendszerhez hasonlóan az egyes témakörök előtt külön kiemeljük azonban azokat a nevelési vonatkozásokat, amelyek kiaknázására az illető téma nagyobb lehetőséget nyújt.

I. téma: **A hatványozás általánosítása** (kb. 6 óra)

Nevelési területek (feladatok)

Az exponenciális függvény fogalma eléggé elvont a tanulók számára. A természetben, a környezetünkben azonban sokszor találkozunk exponenciális változással (baktériumok osztódása, kamatos kamat, termelés azonos százalékkal történő növekedése évről évre stb.). Ezek közül minél többet mutassunk meg a tanulóknak, hogy lássák, ez a függvény is a valóságot írja le.

Az exponenciális függvény értelmezésének kiterjesztéséhez, két általánosítható gondolat is felmerül: az analógia alapján történő tovább folytatás és szűkebb értelmezésről az általánosabbra való áttérés úgy, hogy a már érvényben levő megállapítások ebben a kibővített körben is érvényben maradjanak.

A számok normálalakba írásakor a célszerűbb jelölésmód fontosságát mutathatjuk meg. Ismét sok érdekes példát mondhatunk (űrhajózás, égitestek, atomok méretei stb.), amely megint a matematika és a valóság kapcsolatát világítja meg.

A számok normálalakba írásának sok szakmában fontos gyakorlati jelentősége is van, tehát megmutathatjuk a matematika alkalmazhatóságát is.

A tananyag elsajátítására vonatkozó követelmények

(Szöveg mellett húzott vonallal emeljük ki a minimum-követelményeket.)

Ismerjék fel az exponenciális változást, konkrét esetekben. Értsék az exponenciális függvény fogalmát (az alap pozitív, a kitevő pozitív egész szám). Ismerjék a nulla és negatív egész kitevőjű hatványok értelmezését. Tudjanak értéktáblázatokat készíteni formulával adott exponenciális függvényhez (az alap pozitív egész, például $y=5^x$).

Tudjanak konkrét exponenciális függvényeket ábrázolni koordináta-rendszerben értéktáblázat segítségével (az alap pozitív egész szám, például: $y=2^x$).

Tudjanak pozitív kitevőjű hatványokat átírni negatív kitevőjű hatványokká és megfordítva.

Az alap pozitív, a kitevő egész szám, például: $3^{-4}=\frac{1}{3^4}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$; $(0,2)^{-2}=25$ stb.

Tudjanak értéktáblázatokat készíteni formulával adott exponenciális függvényekhez, és ennek alapján ábrázolni őket koordináta-rendszerben. (Az alap pozitív szám a kitevő egész szám, például: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y=(0,2)^x$ stb.

Tudjanak kamatos kamatot számolni 1, 2, 3 évre.

Tudják mit jelent a számok normálalakja.

Alkalmazás szinten tudjanak tetszés szerinti számokat normálalakban felírni és megfordítva normálalakban adott számot egy tízes számrendszerbeli számként felírni.

II. téma: **Törtes egyenletek** (kb. 13 óra)

Nevelési területek (feladatok)

A törtkifejezésekkel végzett műveletek nagy figyelmet és bizonyos leleményességet igényelnek. Fel kell fedezni az egyszerűsítési lehetőségeket, a kiemelendő közös tényezőt, közös osztót.

Így alkalmunk van a találékonyság, a fantázia és a figyelem-összpontosítás fejlesztésére. A megfelelő átalakítási lehetőségek felismeréséhez, gyors és pontos elvégzéséhez gyakorlat kell. Rá kell ébresztenünk tanulóinkat, hogy nem elég megérteni az egyes átalakítások lényegét, alaposan be is kell gyakorolni azok alkalmazását.

A törtkifejezések helyettesítési értékének kiszámítása során fejleszthetjük a számolási készséget, a becslést.

A pontosság, a hiba, hibakorlát fogalma nagy szakmai jelentőséggel bír. Itt a matematika alkalmazhatósága kerül előtérbe. A törtes egyenletek tanítása felveti az egyenletek értelmezési tartományának kérdését. Ebben általános nevelési lehetőség rejlik körülhatárolni azt a területet, amelyben az illető igazság, törvény érvényben van.

Ezenkívül alkalom adódik az önellenőrzés fejlesztésére is.

Az ekvivalencia gondolata sem csak matematikai fogalom, általánosítható, fejleszti a logikus gondolkodást.

A tananyag elsajátítására vonatkozó követelmények.

Ismerjék az algebrai kifejezés fogalmát.

Tudják, hogyan értelmezzük az egész és törtkifejezéseket.

Tudják mikor nincs értelme a törtkifejezésnek.

Alkalmazás szinten tudjanak törtkifejezéseket egyszerűsíteni olyan esetben, ha a tört számlálója is és nevezője is egytagú kifejezés.

Például: $\frac{30x^3}{120^4x^2}$, vagy többtagú kifejezés, de a közös tényező könnyen felismerhető. Például:

$$\frac{5x^2+10x}{15x^3+30x^2}, \quad \text{vagy:} \quad \frac{x^2+2x+1}{x+1} \text{ stb.}$$

Tudjanak összetettebb törtkifejezéseket egyszerűsíteni. Például:

$$\frac{(c+d)(c+d+3)}{c(2d+c+3)+d^2+3d}.$$

Tudják, hogy a törtkifejezésekre ugyanazok a műveleti szabályok érvényesek, minta törtszámokra. Tudjanak összeadást, kivonást, szorzást, osztást végezni egyszerűbb törtkifejezésekkel. Például:

$$\frac{5x}{12y}+\frac{2y}{3x}; \quad \frac{3ab}{2abc}-\frac{a}{bc};$$

$$\frac{3xy}{2x}\cdot\frac{x^2}{x}; \quad \frac{12a^2b}{5b^2}:\frac{6ab^2}{10b^3} \text{ stb.}$$

Tudjanak egyszerűbb törtkifejezéseket hatványozni. Pl.

$$\left(\frac{3b}{2c}\right)^3; \quad \left(\frac{a+3}{1-b}\right)^2 \text{ stb.}$$

Tudjanak összetettebb törtkifejezésekkel is műveleteket végezni.

$$\frac{12a^2+4ab}{3x^3y^2-9xy^3}:\frac{a-32a^2b}{21x^2y^2} \quad \text{vagy:} \quad \left(\frac{2x^2+3x-72}{5y^2-3xy+12}\right)^2 \text{ stb.}$$

Tudják törtkifejezések helyettesítési értékét kiszámolni alkalmazás szinten. Tudják, mit értünk egy tört értelmezési tartományán és meg is tudják határozni azt egyszerűbb esetekben. Például:

$$\frac{5y^2+16}{y-3} \text{ stb.}$$

Meg tudják határozni összetettebb törtkifejezések értelmezési tartományát. Például:

$$\frac{7r+8s}{(2t-v)\cdot(3x+6t)}.$$

Értsék, hogy mit jelent a mérési adatok pontossága, közelítő pontossága.

Ismerjék a hibakorlát, az értékes jegy fogalmát.

Értsék, hogy mit jelent az összeg és különbség, a szorzat és hányados pontossága, tudják, hogy mit értünk a kerekített értékek pontosságán. Szükség esetén meg is tudják ezeket határozni. (A követelmények e téren a szakmai igényeknek megfelelően igen különbözőek lehetnek, megértési szinttől a biztos alkalmazásig kérhetjük.) Tudják mit értünk egy egyenlet értelmezési tartományán.

Meg tudják állapítani — alkalmazás szinten — a törtes egyenletek értelmezési tartományát.

Tudjanak megoldani egyszerűbb törtes egyenleteket. Például: $\frac{4x}{5-x}=4$.

Tudjanak szöveg alapján felírni és megoldani összetettebb törtes egyenleteket. Értsék az ekvivalencia fogalmát egyenletek esetében.

Értsék a gyökvesztés és hamis gyök fogalmát. Itt is mint, mindenütt, nehéz meghatározni azt, hogy mit jelent az összetettebb törtes egyenlet felírása és megoldása. Általában a több, 5—6 lépésben megoldható, különböző nevezőjű törteket tartalmazó egyenleteket nevezzük összetettebbnek. Emellett természetesen lehet nehéz és összetett a probléma is, amely végsősoron esetleg igen egyszerű egyenlettel írható fel.

III. téma: **Elsőfokú, kétismeretlenes egyenletrendszerek** (kb. 8 óra)

Nevelési területek (feladatok)

Kétismeretlenes lineáris egyenletek, egyenletrendszerek felírásához is gyakorlati problémák vezessenek, megvilágítva a matematika és a valóság kapcsolatát.

A tanult többféle megoldási mód sugallja azt a gondolatot, hogy általában több út is célravezethet, meg kell keresnünk azonban, a legmegfelelőbbet.

Itt is követeljük meg az állandó önellenőrzést.

Az egyenletrendszerek felírása szöveg alapján, a problémák matematikai megfogalmazását, végső soron a modell-alkotási képesség fejlesztését szolgálja.

A tananyag elsajátítására vonatkozó követelmények

Ismerjék az elsőfokú kétismeretlenes egyenlet és egyenletrendszer fogalmát.

Tudják, hogy mit értünk a kétismeretlenes egyenlet megoldásán (az egyik egyenlet megoldásaiból álló és a másik egyenlet megoldásaiból álló két halmaz közös része).

Ismerjék az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer grafikus megoldását.

Ismerjék az egyenletrendszer algebrai megoldását, egyenlő függvényértékek módszerével, behelyettesítő és egyenlő együtthatók módszerével. Meg tudjanak oldani egyszerűbb elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszereket (alkalmazás szint.) Például:

$$y = -x + 5;$$

$$y + 3 = x \text{ stb.}$$

Fel tudjanak írni és meg tudjanak oldani szöveg alapján összetettebb elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszereket. Az összetettebbet itt is ugyanúgy értelmezzük, mint a törtes egyenletek esetében tettük. Több lépésben bonyolultabb algebrai átalakításokkal megoldható feladatok, vagy összetettebb szöveges problémák megoldása.

IV. téma: **Térgeometria** (kb. 14 óra)

Nevelési területek (feladatok)

A térgeometria ez a fajta feldolgozásmódja igen erősen fejlesztheti az általánosító képességet. Hiszen vizsgáljuk általában a síkidomok tulajdonságait, megkeressük a közös jegyeket, tudatosítjuk a különbségeket. Nem csak a kitüntetett testekkel foglalkozunk, hanem általában a testekkel, azok esetleges közös tulajdonságaival.

Lehetőségünk nyílik a térszemlélet és nem utolsó sorban az esztétikai érzék fejlesztésére.

A számításos geometriai feladatok ismét a szakmai alkalmazhatóságra világítanak rá. Ez itt különösen fontos, hiszen a harmadik év végén van a szakvizsgára felkészítés időpontja is.

Ismét nagy súlyt kell fektetnünk a számolási készség, a becslés és az önellenőrzés fejlesztésére.

A tananyag elsajátítására vonatkozó követelmények.

Ismerjék a ponthalmaz fogalmát síkban, térben.

Ismerjék a pont, az egyenes, a sík, a síkidom, a határoló vonal, a test, a határoló felület fogalmát.

Ismerjék a térben az egyenesek párhuzamosságának, metszésének, merőlegességének, kitérésének fogalmát.

Ismerjék két sík kölcsönös helyzeteit, sík és egyenes kölcsönös helyzeteit, a metszésvonal és a döféspont fogalmát. Tudják, hogy az egyenest két pontja meghatározza.Tudják, hogy a síkot három pontja, egy egyenese és egy ezenkívüli pontja, illetve két egyenese meghatározza. Tudják, hogy mit értünk sík és egyenes szögén és két sík hajlásszögén.

Ismerjék az általános iskolában tanult síkidomok (háromszögek, négyszögek) és testek (gömb, egyenes henger, hasáb, egyenes körkúp, egyenes gúla) meghatározó adatait.

Ismerjék a ferde henger, ferde hasáb, ferde kúp és ferde gúla tulajdonságait.

Tudják kiszámítani az általános iskolából ismert síkidomok kerületét, területét és testek felszínét, térfogatát (alkalmazás szinten.)

Ismerjék a csonkakúp és csonkagúla tulajdonságait. Értsék felszínük és térfogatuk kiszámítását.

Tudják kiszámítani ismert síkidomokból összetett síkidomok területét, és ismert testekből összetett testek felszínét és térfogatát.

A kerület, terület, felszín és térfogatszámítási feladatok terén a követelmények a szakmai igényeknek megfelelően igen különbözőek lehetnek.

GARÁDI JÁNOS
tudományos munkatárs
Budapest

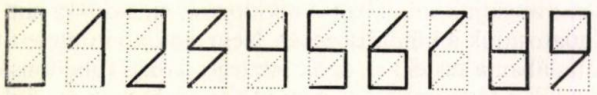
Tájékoztató a Középiskolások 1982. évi Számítástechnikai Versenyéről II.

Néhány kitűzött feladat és megoldása

Az alábbiakban speciális számítástechnikai előismereteket nem igénylő és az információ feldolgozása elméletének szempontjából érdekes feladatokat mutatunk be.

1. feladat (I. forduló 2. feladata)

A szovjet borítékokon az alábbi ábrán látható módon kell megadni az irányítószámok számjegyeit.



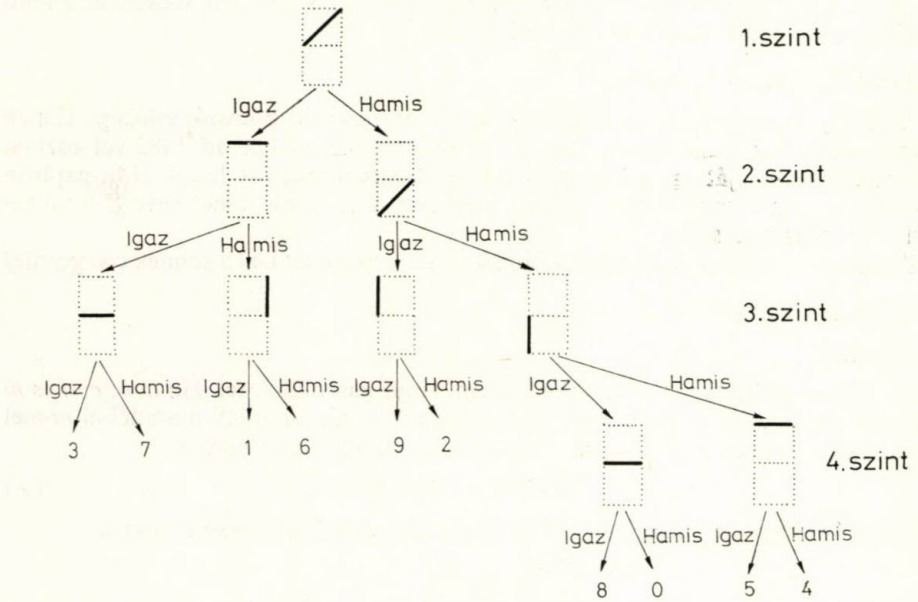
Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a tíz számjegy mindegyikét az itt látható 9 vonalkából kell összeállítani.

A leveleket osztályozó gép a programozó által előírt sorrendben lépésenként egy-egy vonalkáról eldönti, hogy megvastagította-e a levél feladója. Adjunk meg egy eljárást, amelynek során a gép minél kevesebb vonalka megvizsgálásával eldöntheti, hogy milyen számjegy van a téglalapban! (Mindegyik kérdés függhet a korábbi kér-

désekre kapott választól.) Képzeljük el, hogy a gépnek tízezer borítékot kell az utolsó számjegyük alapján szétválogatnia; mindegyik számjegy egyforma gyakorisággal (ezerszer) fordul elő. Hány vonalkát fog a gép végigvizsgálni a feladat megoldása során?

A feladat megoldása

Az osztályozó eljárást legszemléletesebben az ún. döntési fa felrajzolásával adhatjuk meg:

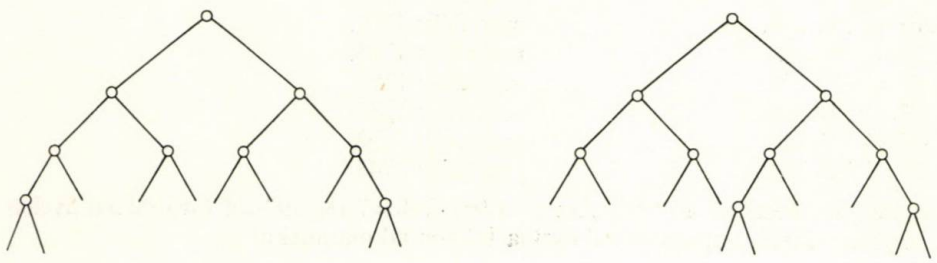


Az ábra „olvasása" nyilvánvaló: minden csomópontban a számítógép eldönti, hogy a megadott vonalka vastag-e vagy nem. Könnyen látható az is, hogy egy adott szám meghatározásához annyi vizsgálat szükséges, ahány szint van fölötte a döntési fában.

Mivel egy vizsgálatnak pontosan kétféle eredménye lehet és $2^3 < 10 < 2^4$, nincs olyan döntési fa, amelyben minden számjegy legfeljebb három vizsgálattal meghatározható.

Az is igazolható, hogy pontosan három vagy négy vizsgálattal eredményre vezető döntési fákban mindig van hat szám, amelynek meghatározása három vizsgálatot igényel, míg a további négy szám meghatározása négy vizsgálatot igényel.

Ilyen döntési fák még:



Ha mind a tíz számjegy azonos gyakorisággal fordul elő, akkor éppen ezek a döntési fák lesznek optimálisak.

A feladatban $[(6 \cdot 3)+(4 \cdot 4)] \cdot 1000 = 34\,000$ vizsgálatot kell végezni.

Megjegyzések:

1. A számjegyek kódolása a szovjet borítékon szerencsés, mert, mint megmutattuk — egyenletes előfordulási gyakoriság esetén — szerkeszthető optimális döntési fa.
2. Ha a számjegyek különböző gyakorisággal fordulnak elő, nem feltétlenül a fenti ún. kiegyensúlyozott döntési fák az optimálisak.

2. feladat (I. forduló 3. feladata)

Adott egy 4 alapműveletet végző, 9 jegyet megjelenítő zsebszámológép. Ennek segítségével kell kiszámolnunk, hogy 2^{1000} mennyi maradékot ad 1982-vel osztva. A memória funkcióját egy papírlap és toll segítségével magunk látjuk el (a papíron műveleteket nem végezhetünk). Adjunk módszert a maradék minél kevesebb művelettel való kiszámolására!

Állapítsuk meg, hogy eljárásunk során hány alapműveletet kell a gépnek elvégeznie!

A feladat megoldása

A) megoldás

A feladat megoldásához a következő elemi tényt használjuk fel. Ha a, b, c, d és m természetes számok, a és b, illetve c és d ugyanazt a számot adják maradékul m-mel osztva, akkor $a \cdot c$ és $b \cdot d$ is azonos maradékot adnak m-mel osztva.

$$2^{1000} = 2^{40} \cdot 2^{960} = (2^{20})^2 \cdot (2^{15})^{64}. \qquad (*)$$

Először határozzuk meg, hogy 2^{40} mennyit ad maradékul 1982-vel osztva.

$$2^{40} = (2^{20})^2,$$

$2^{20} = 1\,048\,576$, még befér a gépbe.

3 művelettel (egy maradékos osztással) megállapítható, hogy mennyit ad maradékul: 98-at.

A $(2^{15})^{64}$ felírható $\Big(\big(\big(\big(\big(\big(2^{15}\big)^2\big)^2\big)^2\big)^2\big)^2\Big)^2$ alakban.

3 művelettel megállapítjuk a 2^{15} maradékát, ezt négyzetre emeljük, 3 művelettel megállapítjuk a maradékot, majd ezt az utóbbi 4 lépést 5-ször megismételjük.

Bár a feladat kitűzésében ez nem szerepel, illusztrációként elvégezzük a számításokat:

$2^{15} = 32\,768$,	maradék: 1056,
$1056^2 = 1\,115\,136$,	maradék: 1252,
$1252^2 = 1\,567\,504$,	maradék: 1724,
$1724^2 = 2\,972\,176$,	maradék: 1158,
$1158^2 = 1\,340\,964$,	maradék: 1132,
$1132^2 = 1\,281\,424$,	maradék: 1052,
$1052^2 = 1\,106\,704$,	maradék: 748.

Végül (emlékezzünk a $(*)$ képletre!) a $98^2 \cdot 748 = 7\,183\,792$-ről további 3 művelettel megállapítható, hogy 1982-vel osztva 1024-et ad maradékul.

Ha feltételezzük, hogy a 2 első 10 hatványát fejből tudjuk, akkor a 2^{20} és a 2^{15} kiszámítása egy-egy műveletet igényel. Ezenkívül végeztünk 7 négyzetre emelést, egy szorzást és 8 maradékos osztást (24 művelet), tehát összesen 34 műveletet. (Az utolsó lépésben egy kis szerencsénk volt, hogy $98^2 \cdot 748$ befért a gépbe.)

B) megoldás

Az előző megoldás során az 1982 semmilyen speciális tulajdonságát nem használtuk ki. Vegyük azonban észre, hogy $1982 = (2 \cdot 991)$, és 991 prímszám.

Ezért a Fermat-tétel miatt

$(2^{990} - 1)$ osztható 991-gyel, azaz
$(2^{991} - 2)$ osztható 1982-vel.
$2^{1000} = (2^{991} - 2) \cdot 2^9 + 2 \cdot 2^9$.

Minthogy ez utóbbi összeg első tagja osztható 1982-vel, a keresett maradék 1024.

Ez a megoldás végül nem igényelt egyetlen „gépi" műveletet sem, mert fel tudjuk használni azt a körülményt, hogy az $\frac{1982}{2}$ egy 1000-hez közeli és 1000-nél kisebb prímszám.

Megjegyzés:

Azok a versenyzők, akik ezt a megoldást adták — igen helyesen — észrevették, hogy ez „nem számítástechnikai" megoldás, mert nem lehet egyszerűen és áttekinthetően általános algoritmussá fejleszteni.

3. feladat (II. forduló 1. feladata)

A képernyőn megjelenő 4 jegyű számokhoz hibajelzés céljából egy 5-ik ellenőrző (CDV)* számjegyet rendel a számítógép.

a) Milyen algoritmus alapján történik a hozzárendelés?

b) Milyen négyjegyű számok esetén adja ki ugyanazt az ellenőrző számot?

Ilyen számok például a következők:

1 1 1 1 → 6	1 1 1 2 → 7	1 1 1 3 → 8	1 1 1 4 → 9
1 1 1 5 → 0	1 0 0 0 → 7	1 1 2 1 → 9	1 2 1 1 → 1
1 1 0 0 → 2	1 2 0 0 → 7	2 0 0 0 → 4	1 2 3 4 → 0

A feladat megoldása

a) Az algoritmus a következő:
abcd beírt szám esetén az ötödik szám (x)
$a(7a+5b+3c+1d)$ összeg utolsó számjegye.

Megjegyzés:

Természetesen a fenti állításban csak akkor lehetünk biztosak, ha mind a 10 000 lehetséges számnégyesre kipróbáltuk az algoritmus helyességét. Arról azonban, hogy az esetek nagy százalékában valóban így működik az algoritmus, már kevés próbálkozással is nagy valószínűséggel következtethetünk.

b) E kérdés megválaszolása azt jelentené, hogy minden egyes x értékhez megadjuk azokat az *abcd* számnégyeseket, amelyekhez éppen x-et rendeli az algoritmus. A teljes diszkussziót nem végezzük el.

Megmutatjuk, hogy minden egyes x értékhez pontosan 1000 számnégyes tartozik.

* Check Digit Verisier.

Ugyanis az első 3 számjegyet (abc) 1000-féleképpen megválasztva egy adott x-hez pontosan egy negyedik számjegy választható, azaz minden x-hez legalább 1000 számnégyes tartozik. Mivel összesen 10 000 számnégyes van, ez csak akkor lehetséges, ha minden x-hez pontosan 1000 számnégyes tartozik.

Megvizsgáljuk még, hogy két számjegy felcserélését mikor „nem veszi észre" az ellenőrző kód.

Legyen a és b a két felcserélt szám; ha szomszédok, akkor az ellenőrző kódképzés során $y+2$ és y a szorzótényezői, így csere esetén az összeg:

$$(a\cdot(y+2)+b\cdot y)-(a\cdot y+b\cdot(y+2))=2(a-b)\text{-vel változik.}$$

Hasonlóan igazolható, hogy „másod", illetve „harmad" szomszédok cseréje esetén az összeg $4(a-b)$, illetve $6(a-b)$-vel változik.

Azonos eredmény akkor adódik, ha $2\cdot k(a-b)$ a 10 egészszámú többszöröse, azaz

$$(a-b)=\begin{cases}0\\ \pm 5\end{cases}.$$

Ha $a-b=0$ az nem hiba, mert azonos számokat cseréltünk fel.

4. feladat (II. forduló 3. feladata)

Van N hírszerző. A felderítés befejezése után igyekeznek minél gyorsabban egymást értesíteni a szerzett információról. Egyszerre csak két hírszerző találkozhat, egy találkozáskor mindent elmondanak egymásnak, amit tudnak.

a) Adjunk meg olyan algoritmust, hogy $2N-3$ találkozás után minden hírszerző ismerje a teljes felderített információt.

b) Ha $N\geqq 4$, adjunk meg olyan algoritmust, amely ugyanezt a célt $2N-4$ lépésben valósítja meg.

A feladat megoldása

$N=2, 3$ esetre a feladat megoldása nyilvánvaló.

Az is világos, hogy $N\geqq 4$ esetén elegendő a *b)* feladatot megoldani. Jelölje h_1, h_2, ..., h_N az N hírszerzőt.

$N=4$-re pl. a (h_1, h_2), (h_3, h_4), (h_1, h_3), (h_2, h_4) találkozósorozat után megtörténik a teljes információcsere.

Ha $N>4$ jelöljünk ki egy 4-elemű „agytrösztöt", pl. h_1, h_2, h_3, h_4. Az agytröszt tagjai találkoznak a maradék $N-4$ hírszerzővel.

Ezek után egymás között 4 találkozás során kicserélik az általuk ismert (teljes) információt, majd az agytröszt tagjai $N-4$ találkozás során közlik a teljes információt a többi hírszerzővel.

Látható, hogy lényegtelen az agytröszt tagjai közötti „munkamegosztás" az információ begyűjtésében és terjesztésében.

Közlemény

A Műszaki Életnek, a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége központi lapjának szerkesztősége új helyre költözött. Címük: Budapest, Fő u. 68.; 1027. Telefon: 154-090 vagy 154-250 és 437-es mellék.

DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ
egyetemi adjunktus
Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen

A tanárképzés helyzete, problémái és fejlesztésének lehetőségei

A tudományegyetemek természettudományi karán 1975-ben kezdődött meg az új képzési rend és tantervi irányelvek életbeléptetése. A tanárszakokon 4+1 éves a képzési rend. 4 évig folyik a szakmai, ideológiai, általános pedagógiai, pszichológia és szakmódszertani képzés, az ötödik év pedig elsősorban az iskolai gyakorlásra, a szakdolgozat elkészítésére és speciális előadások számára van fenntartva.

Az új tervezet menetközben többször módosult. Problémát okozott pl. a kis óraszámú, előkészítetlen tantárgyak egymás utáni bevezetése, vagy a már kész tanterven utólagosan végrehajtani az 5%-os óraszámcsökkentést.

A KLTE-n nappali és levelező tagozaton folyik a matematikaszakos tanárok képzése. Nappali tagozaton matematika—fizika, matematika—kémia és matematika—ábrázoló geometria szakos tanárok képzése történik, míg a levelező tagozaton matematikaszakos kiegészítő képzésben részesülnek a főiskolai végzettségű matematikaszakos tanárok (képzési idejük 3 év).

Képzési cél: olyan marxista világnézetű, széles látókörű és szilárd szakmai, pedagógiai, módszertani ismeretekkel rendelkező szaktanárok képzése, akik képesek szakmai, módszertani ismereteik, készségeik folyamatos felfrissítésére, gyarapítására, pedagógiai képességeik megújítására, további folyamatos önképzésre, továbbképzésre.

A fenti célok megvalósítása érdekében az új tantervet a következő főbb változtatások jellemzik a *szakmai képzés* területén:

— külön vált a tanár és a nem tanár szakos hallgatók képzése,
— a hallgatók terhelése egyenletesebb, de egyben magasabb lett (a régi tanterv szerinti 28 óra helyett előbb 35 óra, majd 32 óra lett a maximális heti óraszám),
— nagyobbak lettek a gyakorlatok óraszámai, ezzel együtt megnőtt a folyamatos számonkérés lehetősége,
— jobban tükröződnek a tanári munka szempontjai az egyes szaktárgyak oktatásában.

Ha végignézzük a matematika—fizika, matematika—kémia, matematika—ábrázoló geometria szakok tantervét, akkor azt látjuk, hogy a szakmai alapozó tárgyak tanítási céljai és feladatai között minden esetben megtalálható a középiskolai tananyaggal való kapcsolatra vonatkozó utalás.

Ezek közül emelek ki néhányat a következőkben.

— Segítse elő azoknak a módszereknek a tudatossá válását, amelyek a geometriai feladatok megoldásában alapvetők és a középiskolai tanári munkában hasznosíthatók. (Bevezetés a geometriába).
— Adja meg a középiskolai algebra- és geometria-tananyag egységes szemléletéhez szükséges matematikai ismereteket (Lineáris algebra és geometria).
— Nyújtson olyan ismereteket, amelyek segítségével a középiskolában tanítandó anyagot egységesen lehet szemlélni és tárgyalni, a számfogalom és a középiskolai algebra anyag mélyebb összefüggéseit feltárni. (Algebra.)
— Ismertesse meg a hallgatókkal az analízis legfontosabb alapfogalmait és eredményeit. Biztosítsa a középiskolai anyag megfelelő részeinek magasabb szintű megértését, begyakorlását. (Bevezetés az analízisbe és topológiába.)
— Segítse elő és támassza alá a differenciál- és integrálszámítás középiskolai

feldolgozását. (Differenciál- és integrálszámítás.)

— Számítástechnikai ismeretek elsajátítása; az algoritmikus szemléletmód kialakítása és a középiskolák számára is elérhető mikroszámítógépek (ABC—80 vagy iskolaszámítógépek) BASIC nyelven történő programozásának elsajátítása. (Számítástechnika.)

— A középiskolai tananyag elmélyítése, sokoldalú megvilágítása az egyetemen tanult ismeretek felhasználásával. A hallgatók feladatmegoldókészségének és problémalátásának megalapozása és fejlesztése. Nehezebb gondolkodtató feladatok és versenyfeladatok megoldása. Szakköri témák feldolgozásával a hallgatók előkészítése a középiskolai matematika szakkörök színvonalas vezetésére, a tehetséges tanulókkal való foglalkozásra. (Elemi matematika.)

A fentiek is mutatják, hogy szemléletmód-változás várható a jövő tanárnemzedékének a felkészítésében. Az egyetem feladata széles látókörű, gondolkodó, problémalátó és a problémamegoldásban jártas, önálló, alkotó munkára is képes tanárok képzése.

Az általános pedagógiai, pszichológiai és a szakmódszertani képzés átszervezésének az volt a fő szempontja, hogy ez a hallgató szakmai képzésével párhuzamosan történjen, az első félévtől az utolsóig.

Az új tanterv szerint a matematika—fizika, matematika—kémia és a matematika—ábrázoló geometria szakos hallgatók tantervi hálója a következőképpen alakul:

I. Általános pedagógia és pszichológia

Félév:	1	2	3	4	5	6	7	Össz.
Általános és fejlődéslélektan		2+0	2+0					4+0
A pedagógia elméleti és történeti alapjai					2+0			2+0
Pedagógia I.						2+1		2+1
Pedagógia II.							2+1	2+1
Pedagógiai pszichológia							0+1	0+1

II. Speciális szakmai tárgyak

Félév:	6	7	8	9	10	Össz.
Elemi matematika	0+2	0+2	0+2	0+2		0+8
Matematika történet				2+0		2+0
Fizika fejlődése				2+0		2+0
Kémia története				2+0		2+0

III. Tanítással kapcsolatos tárgyak

Félév:	6	7	8	9	10	Össz.
Oktatástechnika	0+2					0+2
Oktatásügyi ismeretek				1+0		1+0
Matematika tanítása		0+2	2+2			2+4
Fizika tanítása		0+4	0+4	2+0		2+8
Kémia tanítása		2+4	1+4			3+8
Ábrázoló geometria tanítása		0+2	0+2			0+4
Iskolai tanítási gyakorlatok				0+11	0+11	0+22

	9. félév	10. félév
Matematika—fizika szak	0+4	0+4
Matematika—ábrázoló geometria szak	0+4	0+4
Matematika—kémia szak	0+6	0+4

Az új tanterv előnyei a pedagógiai és szakmódszertani képzés területén:

— Hosszabb időre húzódik szét a tanári munkára való felkészülés és így nagyobb hangsúlyt kap.
— A hallgatók oktatástechnikai képzésben részesülnek és ennek oktatása megelőzi, ill. elősegíti a szakmódszertan oktatását.
— „Az elemi matematika" és „Matematika tanítása" című tantárgyak különváltak és óraszámuk megnőtt.
— Az utolsó évben — inkább a 10. félévben — csökkent a hallgatók egyetemi elfoglaltsága, így jobban tudnak a tanításra koncentrálni.
— „A matematika tanítása" című tantárgy oktatása (7., 8. félév) megelőzi az iskolai gyakorlatot (9., 10. félév), tehát a hallgatók úgy mennek ki tanítani az iskolába, hogy szaktárgyuk anyagával, annak tanítási módszereivel és problémáival előzőleg az egyetemen már megismerkedtek.
— A szakmódszertani képzést előkészíti és konkrét feladat anyaggal egészíti ki az elemi matematika oktatása (6—9. félév).

A szakmódszertani képzésről

A „Matematika tanítása" című tárgy keretében kb. 80 órát fordíthatunk a hallgatók szakmódszertani képzésére. Ezen idő alatt kell őket felkészíteni az iskolai matematikai tananyag oktatására, a matematikai nevelésre. Célunk elsősorban a tanári képességek kialakítása és fejlesztése, ill. áttekintés nyújtása a matematikai nevelés teljes rendszeréről, hogy bármelyik iskolatípusban, bármilyen tanterv és tankönyv alapján el tudják látni oktató-nevelő munkájukat, sőt a pályakezdés éveire olyan kidolgozott feladatanyaggal rendelkezzenek, amire majd az iskolai tanításban is és a szakkörök vezetésénél is támaszkodni tudnak (elemi matematika).

Elvek

1. Fontosnak tartjuk, hogy a tanárjelöltek megfelelő *szakmai ismeretekkel* rendelkezzenek;
   — ismerjék jól a középiskolai matematikát (tétel, definíció, feladatok) és annak változatos megközelítését, a probléma szituáció teremtését és feloldását,
   — képesek legyenek modelleket építeni, problémákat matematizálni,
   — használják fel az egyetemi tanulmányaik alatt szerzett új ismereteiket (kombinatorika, gráfelmélet, matematikai logika, valószínűségszámítás, számítástechnika stb.)
   — össze tudják kapcsolni az iskolai és a felsőbb matematikát és a tanulók életkori sajátosságainak megfelelő formába tudják önteni,
   — tudjanak és merjenek aktívan részt venni a tantervi anyag feldolgozásában, a tankönyvek kritikai elemzésében.
2. Legyen áttekintésük *a matematikai nevelés* teljes iskolai rendszeréről, annak erényeiről, ellentmondásairól és következetlenségeiről;
   — ismerjék meg, illetve dolgozzák fel az általános iskola, a gimnázium (alap, fakt A, fakt B, speciális), a szakközépiskolák, a szakmunkásképző intézetek matematika-tanterveit, útmutatóit, tankönyveit, feladatlapjait, példatárait, tanári segédkönyveit,

— a gimnáziumi tananyagot témakörönként részletezve dolgozzák fel a problémafelvetéssel együtt,
— ismerkedjenek meg a hallgatók a felhasználásra kerülő szemléltető eszközökkel, azok alkalmazásával, illetve készítésével (oktatástechnika), a matematikának több csatornán keresztül való oktatásával.

3. Ismerjék meg a korszerű és hatékony tanítási módszereket. Ez utóbbi különösen fontos, mert az egyetemi oktatási módszerek és a középiskolai tanítási-tanulási módszerek nagyon eltérnek, hisz az egyetemi évek alatt az előadások, illetve a gyakorlatok dominálnak, a problémamegoldás viszont háttérbe szorul. A legjobb forma erre az, hogy ha maguknak a hallgatóknak kell a problémákat megoldani. Formája kétféle lehet:
   a) Matematikai feladatok megoldása didaktikai feldolgozással (speciális szakmódszertani kérdések).
   b) Didaktikai feladatok megoldása az iskolai matematikai anyaghoz kapcsolódóan (általános szakmódszertani kérdések).

A matematika feladatok megoldása során cél az önálló munkára való nevelés és a feladatmegoldásban való jártasság kialakítása. A feladatmegoldás során megtárgyalásra kerülő kérdések például
— probléma szituációk és megoldásuk,
— különféle megoldási módszerek,
— a feladatmegoldás technikája,
— különféle típusú feladatok bemutatása, pl. hibás bizonyítások, más szöveg és azonos tartalom, gyakorlati feladatok, felesleges adatot tartalmazó feladatok, korlátozott ismeretek segítségével történő feladatmegoldás, versenyfeladatok, felvételi feladatsorok, szakköri feladatsorok stb.,
— diszkusszióra, ellenőrzésre való nevelés.

Didaktikai feladatok például
— tanmenetkészítés a nevelési és oktatási célok megjelölésével,
— tematikus egység feldolgozása, a bevezető, definíciós, begyakorló, ismereteket rögzítő feladatokkal, a folyamatos ismétlés anyagával, a házi feladatok megjelölésével,
— óravázlat készítése, zárótanítási óraterv megvitatása, óraelemzés (konzervóra, óralátogatás),
— feladatlap, mérőlap készítése,
— szakköri tematika kidolgozása.

Elvek
— A tanítási órák stratégiájának kidolgozása.
— Az adott témakör milyen súllyal szerepel a tananyagban, milyen ismeretekre támaszkodik, hogyan illeszkedik be a meglevő ismeretrendszerbe, hogyan, mikor és milyen irányban fogjuk tovább bővíteni. Milyen problémák várhatók az egyes témaköröknél, a tipikus hibák és azok kiküszöbölésének módjai.
— Célszerű felhívni a figyelmet arra, hogy a diák és a tanár másképpen látja a problémákat, másképpen oldja meg azokat, gondolkodás-, illetve látásmódjuk sokszor különbözik. Nem mindig az a nehéz a diáknak, amit a tanárja nehéznek tart, ezért meg kell ismerni a diák gondolkodásmódját.
— A tananyag feldolgozási módszereinek kiválasztása (osztályfoglalkoztatás, egyéni-, csoportmunka, differenciált foglalkoztatás, programozott oktatás).
— Olyan ismeretanyagrendszer kidolgozása, ami biztos tudást ad minden tanuló számára.
— Az ismeretanyag szintezése.
— A szakmódszertani könyvek és folyóiratok aktuális cikkeinek feldolgozása.

Az iskolával való kapcsolat, iskolai tanítási gyakorlat

A tanárjelöltek a 6—8. félévekben pszichológiai, didaktikai, nevelési jellegű hospitáláson és gyakorlatokon vesznek

részt, az iskolai tanítási gyakorlatra pedig a 9—10. félévekben kerül sor. A 6. és 7. félévben 3×2 óra didaktikai hospitáláson vesznek részt a hallgatók hetenkénti váltásban a gyakorló általános iskolában, illetve a gyakorló gimnáziumban, ahol a következő órafajtákat figyelhetik meg:

— élő tanítási óra (szakmai is),
— tv-s óra,
— óra a tükrös teremben,
— „konzerv" óra.

Megfigyeléseiket a Pedagógiai Intézet munkatársai által készített „Napló"-ban rögzítik a megadott megfigyelési szempontok alapján.

A 6. félév után 2 hét nyári nevelési gyakorlat van. A hallgatók különféle iskolai táborokban (napközis-, úttörő-, SZÉP, FEB, KISZ, nyelvi táborok) gyerekek nevelésével foglalkoznak.

A 7. félévben évközben 20 órás nevelési gyakorlatra vannak beosztva 30 tanár mellé, különböző debreceni gimnáziumokba és általános iskolákba, ahol az úttörő-, ill. KISZ munkát segítik.

Az iskolai tanítási gyakorlatra a 9. és 10. félévben kerül sor. A matematika—fizika, matematika—kémia szakos hallgatók mind az általános iskolában, mind a gimnáziumban, a matematika—ábrázoló geometria szakos hallgatók csak a gimnáziumban tanítanak. 11 vezetőtanárhoz vannak beosztva, közülük 7 a gimnáziumi tanár, 3 az általános iskolai tanár. A gimnáziumi tanárok közül hatan a gyakorló gimnázium tanárai, 1 tanár tanít más iskolában. Az általános iskolai tanárok mind a gyakorló általános iskolában tanítanak. Maximálisan 3 jelölt jut egy tanárra, az igazgató, ill. igazgatóhelyettes 1 jelölttel foglalkozik. A vezető tanárok heti 10 órában tanítanak és heti 3 órát fordítanak a hallgatókkal való megbeszélésre. A hallgatóknak 15—18 órát kell félévenként egy-egy szaktárgyukból megtartaniuk és hetente 11—12 órát vannak az iskolában. 2 szabadnapjuk van. Az iskolai gyakorlat során nemcsak saját vezető tanárának óráit látogathatja meg, hanem más vezetőtanárét is, más szakos tanárét is, különböző osztályokba is be mehet, illetve ugyanazon osztály más óráit is megnézheti. Mindkét félévet zárótanítással fejezik be.

A Gyakorló Gimnázium minden évben egy kiemelt fontosságú témakörből szokott szervezni egy tv-s bemutató órát. Ezen és az órát követő módszertani megbeszélésen a Gyakorló Gimnázium, a Gyakorló Általános Iskola Matematika Munkaközössége, a matematikaszakos hallgatók, a szakfelügyelők is résztvesznek. Ekkor a hallgatóknak lehetősége nyílik arra, hogy betekintsenek a pedagógiai alkotó munka folyamatába is, megláthatják, hogy hogyan lehet az új oktatási és nevelési módszereket kidolgozni, ill. kikísérletezni.

A 10. félév elején van a 2 hetes vidéki tanítási gyakorlat. Kb. 40 iskolába (gimnázium, szakközépiskola) mennek ki a hallgatók tanítani. A kijelölt iskolák Hajdú-Bihar, Szabolcs-Szatmár, Borsod, Heves, Szolnok megyékben találhatók. Egy iskolába 6 hallgató kerül, egy vezető tanárhoz egy hallgató van beosztva és a gyakorlat ideje alatt 20 órát kell megtartania a jelöltnek. A vidéki gyakorlaton zárótanítás nincs.

Hallgatóink szeretik a vidéki iskolai gyakorlatot és sok élménnyel gazdagodva szoktak visszajönni róla. Ennek objektív okai:

— bővebb az iskolatípusok köre,
— reálisabb képet nyernek az iskolai munkáról, általában kevésbé válogatott a gyerekanyag,
— több önállóságot kapnak az iskolában, teljes értékű tanárok,
— valódi, tanári problémákkal kerülnek szembe.

A problémákról és a fejlesztés lehetőségeiről

1. A levelezős hallgatók matematika-módszertani képzése az „Elemi matematika és módszertana" című tantárgy keretében történik az 5. és 6. félévben 12+10=22 órában. Ezen

idő alatt kellene a hallgatókat felkészíteni a középiskolai tananyag oktatására, illetve megismertetni velük iskola feladatanyagát.

A problémát tetőzi az, hogy nincs összehangolva a főiskolai és az egyetemi oktatás.

— Vannak olyan témakörök a középiskolai tananyagban, amelyekről a hallgatók főiskolai tanulmányaik alatt nem hallottak semmit sem (pl. gráfelmélet),
— vannak olyan főiskolák, amelyeken egyes tantárgyakat (pl. ábrázoló geometria) nem tanítanak. Ilyen körülmények között bizony igen nehéz helyzetben van a szakmódszertan.

2. Az egyetemi és a középiskolai tantervi reformok egyidejűleg futottak fel, így nincsenek kellőleg összehangolva. (Ez látszik pl. az ÁV tematikán is.)
3. Célszerű volna összegyűjteni az új egyetemi tantervvel kapcsolatos tapasztalatokat és 3—4 év múlva a szükséges korrekciókat végrehajtani. (Például az óraszámcsökkentés miatt kimaradt a matematika—kémia szakos hallgatók tantervéből az ábrázoló geometria, viszont a szigorlati tematikában benne van.)
4. Jobban össze lehetne hangolni tematikában, illetve követelményrendszerben a pedagógiai és szakmódszertani tárgyakat. (Például a „Fizika tanítása", a „Kémia tanítása" tantárgyak kollokviummal zárulnak, a „Matematika tanítása" gyakorlati jeggyel.)
5. A hallgatók csak a 6. félévtől kezdve kerülnek kapcsolatba az iskolával.
6. Nem terjed ki a gyakorlás minden iskolatípusra, főképp gimnázium centrikus.
7. Az egyetemen alkalmazott oktatási módszereket tovább kellene fejleszteni, hogy hallgatóink jobban hozzá szokhassanak az önálló, aktív munkához. Ehhez új hatékony módszernek kidolgozására és kikísérletezésére volna szükség.
8. Igény esetén a szakdolgozatot lehessen az iskolában is írni, ill. a szakdolgozathoz szükséges tapasztalati, megfigyelési anyag összegyűjtésére, mérések elvégzésére legyen lehetőség a gyakorló iskolákban.
9. A szakdolgozati órák száma a matematika—fizika, matematika—ábrázoló geometria szakos hallgatók számára a 9. félévben 0+4 óra, míg a matematika—kémia szakos hallgatók számára 0+6 óra. Vagyis ha pl. egy matematika—kémia szakos hallgató matematikából írja a szakdolgozatát, akkor ez 6 órát jelent számára, míg a matematika—fizika szakos hallgatónak ugyanez a munka „csak" heti 4 óra.
10. Kívánatos lenne több, az iskolai munkával kapcsolatos speciális szeminárium, módszertani TDK létrejötte.

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
tanszékvezető főiskolai tanár
Budapest

A Hajós György Versenyről

A Hajós György Matematikai Tanulmányi Verseny 1982/83 tanévi versenyét a Könnyűipari Műszaki Főiskola rendezte 1983. március 14-én és 15-én. A versenyen a műszaki főiskolák, illetve a műszaki egyetemek főiskolai karai nappali tagozatos hallgatóinak egy-egy négytagú csapata vehet részt. A verseny két kategóriában kerül kiírásra. A *csapatversenyt* az egyes csapatok három, a legtöbb pontot szerzett tagjának

az összpontszáma dönti el, az *egyéni versenyben* mindenki saját elért pontjaival szerepel.

Az idei, sorrendben kilencedik versenyen 15 csapat 60 tagja vett részt. A kitűzött feladatokat a Versenybizottság állította össze a versenyt megelőző napon azokból a feladatokból, amelyeket az egyes főiskolák erre a célra beküldtek. A Versenybizottság elnöke az idén dr. Reiman Istvánné főiskolai docens volt. A kiválasztott öt feladat helyes megoldásáért összesen 100 pontot lehetett kapni.

A kitűzött feladatok

1. Az egységnyi oldalú négyzetet az oldalakkal párhuzamos két-két egyenessel 9 egybevágó négyzetre osztjuk, és a középső négyzetet eltávolítjuk. A megmaradt 8 négyzet mindegyikét ilyen módon ismét 9 egyenlő részre osztjuk, és mindegyikből újra a középsőt eltávolítjuk. Ezt az eljárást n-szer ismételjük.
   a) Hány és milyen oldalhosszúságú négyzet marad az n-edik lépés után?
   b) Mekkora az eltávolított négyzetek területének összege $n \to \infty$ esetén?

2. Valaki azt javasolja, hogy verjenek a jelenlegieken kívül háromforintos pénzdarabokat is. Javaslatát azzal az állítással támasztja alá, hogy pusztán 3 és 5 forintosokkal bármekkora pénzösszeg kifizethető visszaadás nélkül, ha az egész számú forintból áll, és 7 Ft-nál több.

   Igaz ez az állítás?

3. Egy, a tízes számrendszerben felírt négyjegyű számból kivonjuk azt a számot, amelyet az utolsó számjegy elhagyásával nyerünk, majd a különbséghez hozzáadjuk azt a két számot, amelyet az eredeti szám utolsó kettő, illetve utolsó három számjegyének elhagyásával kapunk. Az eredmény 1983. Melyik négyjegyű számból indultunk ki?

4. Igazolja, hogy az $y = x^3 - 6x^2$ egyenletű függvénygörbe inflexiós pontján áthaladó bármelyik szelő és a függvénygörbe két egyenlő területű síkidomot határol!

5. Bizonyítsuk be, hogy a kocka egyik testátlójának felező merőleges síkjából a kocka szabályos hatszög alakú síkidomot metsz ki!

A csapatverseny első három helyezettje

1. **Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola, Győr** (263 pont),
2. **Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola, Székesfehérvár** (240 pont),
3. **MN Killián György Repülő Műszaki Főiskola, Szolnok** (231 pont).

Az első helyezett csapat jutalma 3000 Ft és egy évig birtokolhatja a Hajós György Matematikai Tanulmányi Verseny Vándorserlegét.

Az egyéni verseny első 6 helyezettje kapott pénzjutalmat. Ezek:

1. **Fekete László** (Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola, Székesfehérvár) 96 pont,
2. **Fabulya Zoltán** (Élelmiszeripari Főiskola, Szeged) 90 pont,
3. **Kókai János** (MN Killián György Repülő Műszaki Főiskola, Szolnok) 90 pont,
4. **Préházi Ferenc** (Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola, Győr) 90 pont,
5. **Burján István** (Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola, Győr) 88 pont,
6. **Berkes György** (Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola, Győr) 85 pont.

A Versenybizottság **Bíró Miklós** (Ybl Miklós Építőipari Műszaki Főiskola, Budapest) versenyző dolgozatát a legszebb geometriai feladatmegoldás, **Fónad Sándor** (Élelmiszeripari Főiskola, Szeged) versenyző dolgozatát a legötletesebb algebrai feladatmegoldás címén külön dicsérettel jutalmazta.

A versenyzők a verseny után városnézésen, majd színházi előadáson vettek részt, a versenyzőket kísérő oktatók pedig baráti találkozókon vitatták meg a versennyel, és általában a matematika főiskolai oktatásával kapcsolatos időszerű kérdéseket.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1041. Hányféleképpen lehet 2 fekete, 3 fehér és 4 piros golyót egy sorban úgy elhelyezni, hogy fekete golyó ne kerüljön fehér mellé?

1042. Bizonyítsuk be, hogy a

$$2x^2+5xy-12y^2=28$$

egyenletű hiperbola pontosan két rácsponton halad át!

Kondor László, Dunaújváros

1043. Adott egy a egyenes és egy rá nem illeszkedő A pont. Mi azoknak a C pontoknak a halmaza, amelyekre az ABC háromszög derékszögű, ha az adott egyenes e háromszögek B csúcsához tartozó belső szögének felezője?

Szeredi Éva, Budapest

1044. Oldjuk meg a valós számokon értelmezett

$$\sum_{k=1}^{n} ch[\ln(k^2\cdot\sin^2 x_k)]=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}\right)^2$$

egyenletet!

Cseh László és Merényi Imre, Kolozsvár

1045. Egy forgáskúp alapkörének sugara r, alkotójának hossza pedig l egységnyi. Parabola metszetei közül melyiknek területe a legnagyobb?

1046. Bizonyítsuk be: $n-1$ egyenes elégséges ahhoz, hogy egy $n\times n$-es ($n\geqq 3$) sakktábla valamennyi mezőjének belsején áthaladjon!

Feladatmegoldások (1017—1022)

1017. Bizonyítsuk be: ha p és q ikerprímek, akkor a p^4+4 és q^4+4 nem relatív prímek!

Bencze Mihály, Brassó

I. megoldás: Tegyük fel, hogy $p<q$, ekkor $q=p+2$ és $p\geqq 3$. Mivel

$$p^4+4 = (p^2+2)^2-4p^2 = (p^2+2p+2)(p^2-2p+2) = [(p+1)^2+1][(p-1)^2+1],$$

és ezért

$$q^4+4 = [(q+1)^2+1][(q-1)^2+1] = [(p+3)^2+1][(p+1)^2+1],$$

tehát mindkét természetes szám osztható $(p+1)^2+1$-gyel, ami 1-nél nagyobb egész szám, vagyis p^4+4 és q^4+4 nem relatív prímek.

Polcz Katalin, Pécs
Szabó Kálmán, Miskolc

II. megoldás: A 3, 5, illetve az 5, 7 ikerprímpárokra igaz az állítás, mivel az első párnál 17, a második párnál 37 többszöröseit kapjuk. Mivel a további ikerprímek az 5-tel nem osztható páratlan számok közül kerülnek ki, ezért elég azt megmutatnunk, hogy ha az n páratlan számra $5\nmid n$ teljesül, akkor $5\mid n^4+4$ fennáll. Az 5-tel nem osztható páratlan számok utolsó jegye az 1, a 3, a 7 vagy a 9, ezek negyedik hatványának utolsó jegye ezért 1, tehát n^4+4 utolsó jegye az 5, azaz n^4+4 5-tel osztható.

Csorba Ferenc, Győr és
Nagy Elekné, Pécs

Megjegyzések: 1. Mindkét bizonyításunkból kitűnik, hogy az állítás akkor is igaz, ha p és q másodszomszéd természetes számok.

2. Azt is beláttuk egyúttal, hogy ha p prím, akkor a p^4+4 nem lehet prím.

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

A megoldók száma: 32.

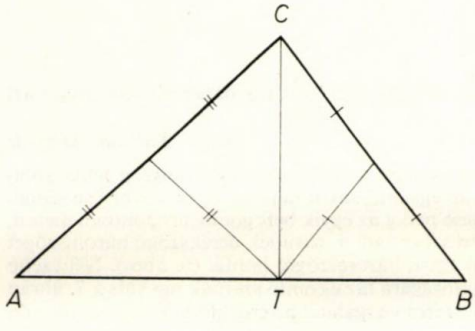
1018. Igazoljuk, hogy bármely háromszög feldarabolható $n(\geqq 4)$ darab egyenlő szárú háromszögre!

Megoldás: Először nem szabályos háromszögekre igazoljuk az állítást, teljes indukcióval.

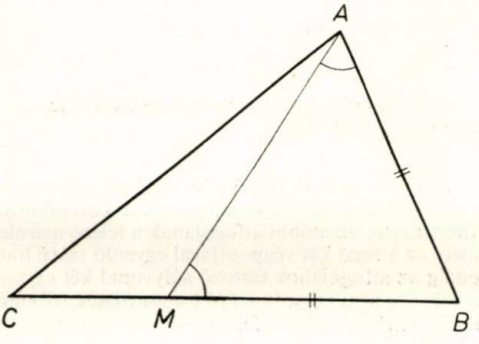
$n=4$ egyenlő szárú háromszögre bármely háromszög feldarabolható (így a szabályos is!). A legnagyobb oldalhoz tartozó magasság ugyanis két derékszögű háromszögre darabolja háromszögünket, mivel a magasság talppontja a legnagyobb oldal belsejében van (1. ábra). E derékszögű háromszögek átfogóihoz tartozó súlyvonalak pedig a két háromszöget két-két egyenlő szárú háromszögre darabolják.

Tegyük fel, hogy bármely nem szabályos háromszög feldarabolható $n(\geqq 4)$ egyenlő szárú háromszögre.

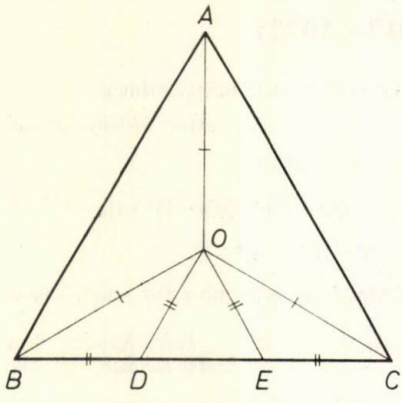
Legyen ABC tetszőleges nem szabályos háromszög. Feltehető, hogy erre $AB<BC$ teljesül. Ekkor létezik a BC oldalnak olyan M pontja, amelyre $BM=AB$ (2. ábra). Az ABM egyenlő szárú háromszögben az $AMB\sphericalangle$ hegyesszög, mivel az alapon fekvő egyik szöge; így mellékszöge, az $AMC\sphericalangle$ tompaszög, tehát az AMC háromszög nem szabályos. Ez az indukciós feltétel miatt n egyenlő szárú



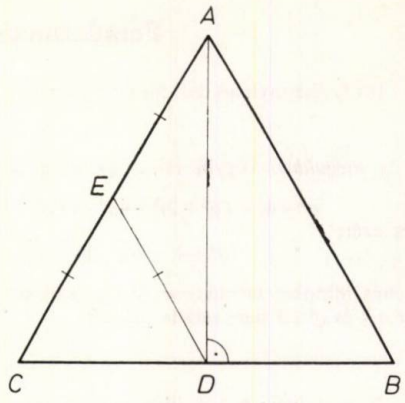
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

háromszögre feldarabolható, tehát az ABC háromszög $n+1$ darab egyenlő szárú háromszögre darabolható, és ezt kellett igazoljuk.

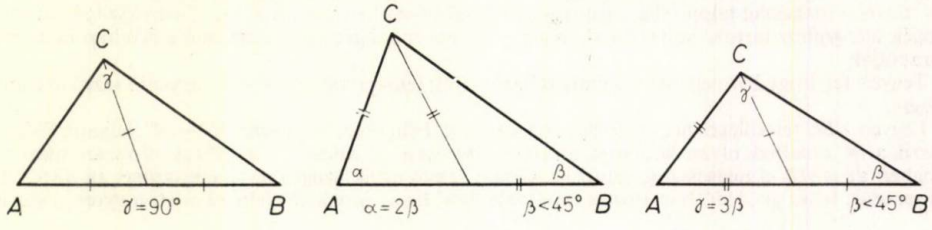
Hátra van még, hogy szabályos háromszögre is igazoljuk az állítást. Az $n=4$ esetet fentebb elintéztük. $n=5$ egyenlő szárú háromszögre például úgy is feldarabolhatjuk az ABC szabályos háromszöget, hogy az OB és OC szakaszok felezőmerőlegeseinek a BC oldalon levő D, illetve E pontjai adta OD, OE szakasz, az OBC egyenlő szárú háromszöget három, az OBD, ODE és OCE egyenlő szárú háromszögre darabolja (3. ábra, O a háromszög középpontja.)

Ha $n\geqq 6$, akkor legyen D az A csúcshoz tartozó magasság talppontja (4. ábra), E pedig az AC oldal felezőpontja.

Az ADE és a CDE háromszögek egyenlő szárúak, az ABD háromszög pedig nem szabályos. Mivel $n-2\geqq 4$, ezért az előbb bizonyítottak szerint ez utóbbi háromszög $n-2$ darab egyenlő szárú háromszögre darabolható, tehát a szabályos ABC háromszög $n(\geqq 6)$ darab egyenlő szárú háromszögre is feldarabolható.

Bíró Béla, Barót és
Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Megjegyzések: 1. $n=1$ egyenlő szárú háromszögre nyilvánvalóan csakis az ilyen háromszögek darabolhatók.



a) b) c)

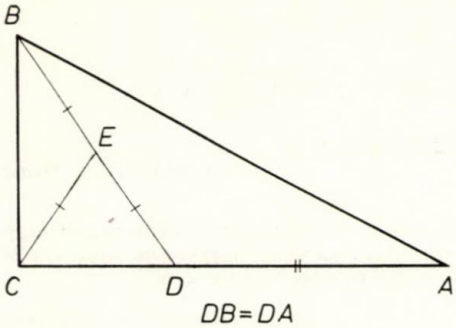
5. ábra

$n=2$ egyenlő szárú háromszögre csakis az 5. ábrán látható háromszögek darabolhatók, amint azt könnyen igazolhatjuk.

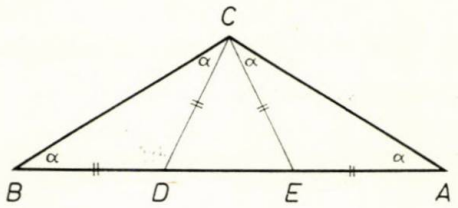
Szabó Kálmán, Miskolc

2. $n=3$ egyenlő szárú háromszögre minden hegyesszögű és derékszögű háromszög feldarabolható, mivel az előbbi köréírható kör középpontja az egyenlő szárú háromszögek közös csúcsának választható, az utóbbi átfogójának a felező merőlegese pedig az egyik befogót olyan pontban metszi, mely az átfogó két végpontjával egyenlő szárú háromszöget ad, a maradék derékszögű háromszöget pedig az átfogójához tartozó súlyvonal két egyenlő szárú háromszögre bontja (6. ábra). Nehezebb a válasz a nem egyenlő szárú tompaszögek felbonthatóságára (az egyenlő szárúak ugyanis a 7. ábrán látható módon mindig feldarabolhatók). Ennek módszeres vizsgálatát az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

A megoldók száma: 16.



6. ábra



7. ábra

1019. Bizonyítsuk be, ha $0<\alpha<\frac{\pi}{2n}$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 k\alpha)(1+\operatorname{tg}^2(k+1)\alpha)} = \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\sin \alpha}.$$

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

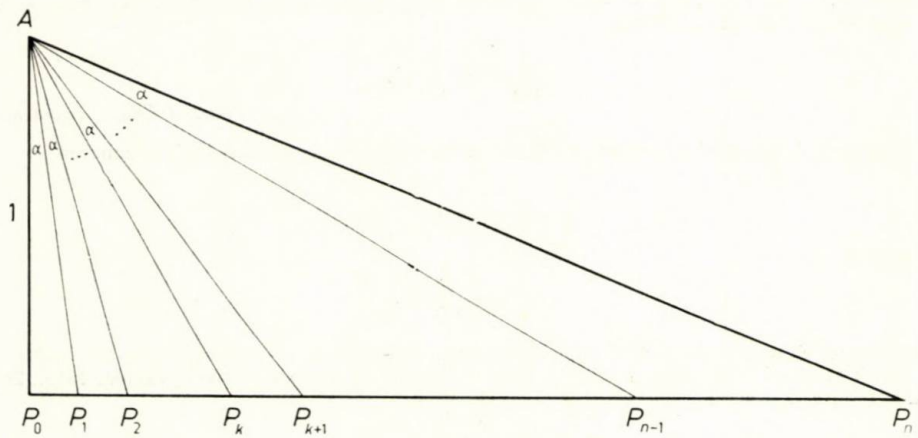
Megoldás: Tekintsük az AP_0P_n derékszögű háromszöget, melynek az A csúcsnál levő hegyesszöge legyen $n\alpha$ mértékű, az AP_0 befogó pedig egységnyi hosszú (8. ábra). Ebben a háromszögben $P_0P_n = \operatorname{tg} n\alpha$.

Az A-nál levő szöget n egyenlő részre osztva, a szögszárak a P_0P_n befogót rendre a $P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}, \ldots, P_{n-1}, P_n$ pontokban metszik. Feltételeink folytán:

$$P_0P_k = \operatorname{tg} k\alpha$$

és

$$AP_k = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 k\alpha}.$$



8. ábra

Az AP_0P_n háromszög t területét kétféleképpen számolva, egyrészt

$$t = \frac{AP_0 \cdot P_0P_n}{2} = \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{2},$$

másrészt

$$t = t_{AP_0P_1} + t_{AP_1P_2} + \ldots + t_{AP_kP_{k+1}} + \ldots + t_{AP_{n-1}P_n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{AP_k \cdot AP_{k+1} \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 k\alpha} \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 (k+1)\alpha} \cdot \sin\alpha.$$

A t-re kapott két kifejezésből pedig következik a feladat állítása.

Szánthó Gyula, Gyula

A megoldók száma: 21.

1020. A $P_1, P_2, \ldots, P_n$ $(n \geqq 4)$ pontok közül semelyik négy nincs egy síkban, és bármelyik négy pont által kifeszített tetraéder térfogata legfeljebb egy egységnyi. Igazoljuk, hogy létezik olyan $ABCD$ tetraéder, amely valamennyi pontot tartalmazza és térfogata nem több 27 egységnél!

Hazag Tibor, Budapest

Megoldás: Az n darab pont véges sok tetraédert határoz meg, ezért van közöttük (esetleg több is) olyan, amelynek térfogata a legnagyobb. Legyen a $P_1P_2P_3P_4$ tetraéder ilyen, maximális térfogatú, azaz $V(P_1P_2P_3P_4) \leqq 1$.

A P_1 csúcsra illeszkedő, a szemköztes $P_2P_3P_4$ lappal párhuzamos sík úgy osztja a teret két féltérre, hogy valamennyi P_i $(1 \leqq i \leqq n)$ pont ugyanabban a féltérben van. Ha ugyanis a P_1 csúcson átmenő sík elválasztaná a P_5 pontot a P_2, P_3, P_4 pontoktól, akkor a $P_2P_3P_4P_5$ tetraéder térfogata nagyobb lenne a $P_1P_2P_3P_4$ térfogatánál, ami ellentmond ez utóbbi maximális voltának. Ezek szerint a P_1, P_2, P_3, P_4 csúcsokra illesztett, a szemközti lappal párhuzamos síkok adta $ABCD$ tetraéder tartalmazza valamennyi P_i pontot. Mivel a tetraéder súlyvonalai egy pontban, negyedelve metszik egymást, ezért ha a $P_1P_2P_3P_4$ súlypontja az S, úgy tekintsük az S közepű, $-\frac{1}{3}$ arányú hasonlósági transzformációt! Ez a hasonlóság a $P_1P_2P_3P_4$ tetraéder lapsíkjait a szemköztes csúcson átmenő, e lappal párhuzamos síkba viszi, tehát tetraéderünkhöz az $ABCD$ tetraédert rendeli. Hasonló poliéderek térfogatainak aránya a hasonlósági arány köbével egyenlő, ezért

$$V(ABCD) = 27V(P_1P_2P_3P_4) \leqq 27,$$

és ezt kellett igazolnunk.

Kovács Gábor, Komárom és Zsidó György, Kolozsvár

A megoldók száma: 6.

1021. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok szorzata legalább egy. Mutassuk meg, hogy $k > m$ (k és m természetes számok) esetén:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^m \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i^k.$$

Bartha Gábor, Szentendre

Megoldás: A számtani és mértani közepekre vonatkozó reláció és feltételünk értelmében:

$$1 \leqq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i^k} \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^k$$

és ugyanígy

$$1 \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^m.$$

A hatványközépre vonatkozó tétel miatt (lásd: Sklarszkij—Csencov—Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I. rész, Aritmetika és algebra; Tankönyvkiadó, 1965., 283. feladat), mivel $k > m \geqq 1$

$$\sqrt[m]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^m} \leqq \sqrt[k]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^k},$$

így ebből éppen a bizonyítandót kapjuk:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^m \leqq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^m \right)^{\frac{k}{m}} \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^k,$$

hiszen $k>m$ miatt $1<\frac{k}{m}$, tehát az 1-edrendű hatványközép nem nagyobb a $\frac{k}{m}$-edrendű hatványközépnél.

Kondor Judit, Budapest

Megjegyzés: A felhasznált tételből következik, hogy az egyenlőség az $m<k$ megszorítás mellett csakis akkor teljesül, ha minden i-re $a_i=1$. Azt is könnyű belátni, hogy a feladat állítása $m=0$ esetén is igaz.

Ambrus Gabriella, Budapest

A megoldók száma: 13.

1022. Oldjuk meg az [1; 2] intervallumon a

$$8\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)=9n^2$$

egyenletet, ahol n pozitív egész!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: Tekintsük az [1; 2] intervallumon értelmezett $f: x\mapsto\frac{1}{x}$ és a $g: x\mapsto\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x$ függvényeket és ezek képeit (9. ábra). Az f képe egy hiperbolaív, a g képe pedig ez ív $A(1;1)$ és $B\left(2;\frac{1}{2}\right)$ végpontjait összekötő húrja.

Mivel az f (alulról) konvex, ezért minden olyan x_i értékre, amelyre fennáll az

$$1\leqq x_i\leqq 2,$$

azaz

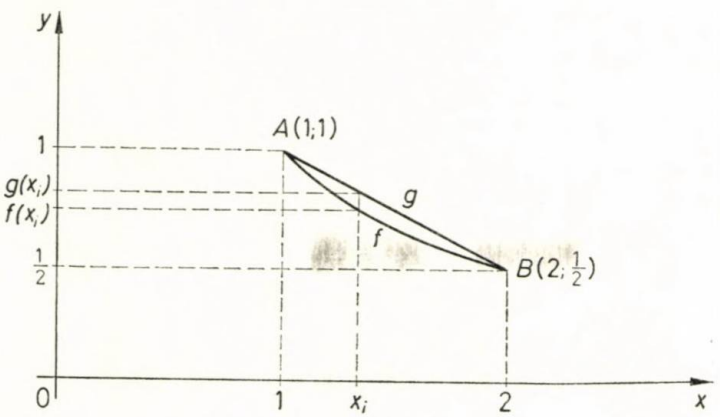
$$f(x_i)\leqq g(x_i)$$

$$\frac{1}{x_i}\leqq\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_i \tag{1}$$

összefüggés. Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_i=1$ vagy 2.

Az (1)-ből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\leqq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_i\right)=\frac{3n}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i. \tag{2}$$



9. ábra

Jelölje s a $\sum_{i=1}^{n} x_i$ összeget. E jelöléssel (2) miatt

$$8\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) \leqq 8s\left(\frac{3n}{2}-\frac{1}{2}s\right) = 12ns-4s^2, \tag{3}$$

amelyre az egyenlőség csakis akkor állhat fenn, ha x_i (minden i-re) 1 vagy 2.

Az

$$s \mapsto 12ns-4s^2$$

függvénynek az $s=\frac{3n}{2}$ helyen maximuma van, és ez a maximum $9n^2$-tel egyenlő. Következésképpen

$$12ns-4s^2 \leqq 9n^2, \tag{4}$$

ahol az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $s=\frac{3n}{2}$.

A (3) és a (4) egybevetéséből:

$$8\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) \leqq 9n^2, \tag{5}$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha x_i bármelyike 1 vagy 2 és $\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{3n}{2}$, vagyis ha k darab $x_i=1$, a többi $n-k$ darab értéke pedig 2 és $k\cdot 1+(n-k)\cdot 2=\frac{3n}{2}$, azaz $k=\frac{n}{2}$. Ezek szerint, ha n páratlan, akkor az (5)-ben egyenlőség nem állhat fenn, tehát eredeti feladatunknak ekkor nincs megoldása.

Ha pedig n páros, úgy feladatunknak akkor és csak akkor van megoldása, ha a számok fele 1-gyel, a másik fele pedig 2-vel egyenlő.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

A megoldók száma: 8.

A megoldók névsora (1017—1022.)

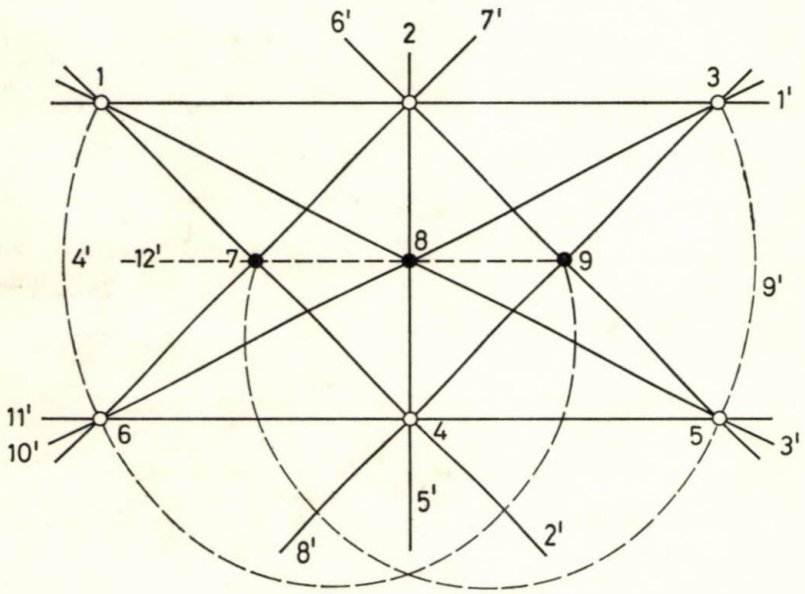
Ambrus Gabriella, Budapest, (1017—1019., 1021.); Bagi Sándor, Barcs (1017., 1019.); Bartha Gábor, Szentendre (1017—1022.); Bencze Mihály, Brassó (1017., 1019., 1022.); Bíró Béla, Barót (1017., 1018., 1019. 2 mód, 1021., 1022.); Bogdán Zoltán, Cegléd (1017—1019., 1021., 1022. 2 mód); Csorba Ferenc, Győr (1017.); Görbe Mihály, Mátészalka (1017—1019.); Hajdú Ferenc, Nagykálló (1017.); Hárspatakiné Dékány Vera, Budapest (1017.); Honti Dénes, Győr (1017., 1018.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1017., 1019., 1020.); Imolya Sándor (1017. 4 mód, 1018., 1019., 1021.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (1017—1019., 1021., 1022.); Kondor Judit, Budapest (1017., 1021.); Korondi Ildikó, Miskolc (1017.); Kovács Sándor, Komárom (1017., 1019., 1020., 1021. 2 mód); Dr. Major Pál, Budapest (1017.); Major Piroska, Budapest (1017.); Medgyesi Zsuzsa, Nagyrécse (1017.); Molnár Lászlóné, Budapest (1017., 1018.); Nagy Elekné, Pécs (1017., 1018., 1021.); Nagy Ferenc, Hajdúnánás (1017.); Nagy-Imecs Vilmos, Székelyudvarhely (1019., 1021.); Nyírő László, Mezőkövesd (1017., 1019.); Polcz Katalin, Pécs (1017. 2 mód, 1018., 1019.); Rischákné Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (1017., 1019.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1017.); Szabó Kálmán, Miskolc (1017—1019., 1021. 2 mód); Szánthó Gyula, Gyula (1017., 1018., 1019. 2 mód, 1021., 1022.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1017—1022.); Varga István, Nagyszalonta (1017., 1019., 1022.); Zalán Péterné, Budapest (1017., 1018.); Zsidó György, Kolozsvár (1018—1020.).

Ára: 5,50 Ft

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1983. október * XXX. évfolyam 5 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

83-3305 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Kobilárcsik György: Az aranymetszés tanításának egyik lehetősége a szakközépiskolákban 129
Lénárt István: Axiomatizálás a gömbfelületen 132
Kallós Károly: A húr függvénykapcsolatai 140
Dr. Kárteszi Ferenc: Egy kombinatorikus geometriai feladat 144
Sugár György: Számítógép-program iskolai órarend készítéséhez 148
Hennyey Judit: SMYOZ — egy logikai játék I. 149
Dr. Berényi Zsuzsanna Ágnes: INTERKOMPUTO '82 156
Dr. Scharnitzky Viktor: Matematikus vándorgyűlés Szegeden 158
Fitos László: Pitagoraszi számnégyesek és szám-*n*-esek 160

СОДЕРЖАНИЕ

Кобиларчик Дьердь: Одна из возможностей обучения золотому сечению в профессиональной средней школе 129
Ленарт Иштван: Аксиоматизация по сферической поверхности 132
Каллош Карой: Функциональные зависимости хорды 140
д-р Картеси Ференц: Об одной задаче комбинаторной геометрии 144
Шугар Дьердь: Программа ЭВМ для составления расписания уроков в школе 148
Хенньеи Юдит: Логическая игра SMYOZ (I) 149
д-р Береньи Жужанна Агнеш: ИНТЕРКОМПУТО '82 156
д-р Шарницки Виктор: Передвижное собрание математиков в Сегеде 158
Фитош Ласло: Четверки и *n*-числа Пифагора 160

INHALT

Kobilárcsik, György: Eine Möglichkeit des Unterrichts des goldenen Schnittes in den Fachmittelschulen 129
Lénárt, István: Axiomatisierung auf der Kugelfläche 132
Kallós, Károly: Über die Funktionsbeziehungen der Sehne 140
Dr. Kárteszi, Ferenc: Eine Aufgabe aus der kombinatorischen Geometrie 144
Sugár, György: Ein Computer-Programm zur Herstellung Schulstundenpläne 148
Frl. Judit Hennyey: SMYOZ — ein logisches Spiel I. 149
Frl. Dr. Zsuzsanna Ágnes Berényi: INTERKOMPUTO '82 156
Dr. Scharnitzky, Viktor: Wanderversammlung der Mathematiklehrer und -Professoren in Szegedin 158
Fitos, László: Pythagoreische Zahlequadrupel und Zahlen-*n*-Tupel 160

KOBILÁRCSIK GYÖRGY
középiskolai tanár
Budapest

Az aranymetszés tanításának egyik lehetősége a szakközépiskolákban

Felvetődhet a kérdés, hogy az anyag mennyisége szempontjából igen szűkös időkeretek között miért tanítsunk olyan ismeretanyagot, amely nem tartozik a szorosan vett tananyaghoz, s közvetlenül a jobb érettségi felkészülést sem szolgálja.

Az aranymetszés említése vagy tanítása nem igényel újabb óraráfordítást, de lehet, hogy éppen ez a téma kelti fel tanítványaink fokozottabb érdeklődését a matematika iránt, és rávilágít arra is, hogy nem szigorú értelemben vett matematikát, ettől teljesen különböző fizikát, kémiát, történelmet és más tárgyakat tanulnak, hanem a környező világ megismeréséhez szükséges — egymás eredményeit ismerő és felhasználó — tudományágak egyik részeként kell a matematikával megismerkedniük.

Oktatásunk egyik központi kérdése — igen helyesen — manapság is az, miként lehetne az ismereteket komplexitásukban megtanítani. Az aranymetszés jó példája lehet annak, hogyan lehet a matematikát, biológiát, történelmet, ha csak egyetlen ponton is, összekapcsolni, s amire középiskolában más példákon alig van lehetőség, a matematika és a művészetek egyik kapcsolódó területét felvillantani. Ez részben a szakközépiskolák hiányos vagy nem létező zenei, építészeti, művészettörténet óráinak pótlását is szolgálhatja. Jól példázhatja azt is, hogy az egyetemes kultúrának és műveltségnek a természettudományok és a matematika éppúgy részei, mint az irodalom, zene, képzőművészetek.

A fogalom bevezetésére második osztályban kerülhet sor. Az egyismeretlenes másodfokú egyenletek megoldása közben alkalom nyílik arra, hogy az $x^2-x-1=0$, majd az „a" paraméterrel adott, b-re felírt $b^2-ab-a^2=0$ egyenletek gyökeit összevessük.

Ekkor térhetünk rá a gondolatkör alapfogalmának bevezetésére; az aranymetszésen egy szakasznak két szeletre vágását értjük úgy, hogy a szeletek közül a kisebbiknek a nagyobbhoz viszonyított aránya megegyezzen a nagyobbiknak a teljes szakaszhoz való arányával. Tehát $a<b$ esetén az $a:b=b:(a+b)$ aránypárnak kell teljesülnie, amit b-re vizsgálva az előbb már megoldott egyenletet és gyököket kapjuk (itt természetesen a megfelelő diszkusszióval). Most már érdekes lehet az egyenlet a-ra történő megoldása, diszkussziója és ebből annak kimutatása, hogy a számadatokból adódó, összetartozó szakaszok hosszának hányadosa állandó.

A probléma olyan felvetésével, amelyben $(a+b)$ szakaszt egységnek választjuk és ezt tekintjük adottnak, más egyenletekhez jutunk; mert x és $1-x$ szakaszokat véve a szeleteknek, valamint $x<1-x$ feltételezésével az $x^2-3x+1=0, x>1-x$ feltétellel az $x^2+x-1=0$ másodfokú egyenleteket nyerjük, amelyekből a szakaszok arányát kiszámítva a már megismert $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618\ldots$ irracionális számot kapjuk. Az egységszakasz aranymetszésének megismerésével — mivel egy aranymetszésből kicsinyítéssel vagy na-

gyítással bármely szakasz aranymetszéséhez eljuthatunk — elmondható, hogy az arányok számértéke nem függ a szakaszok hosszától.

Az eddigi vizsgálatok jó lehetőséget kínálnak a másodfokú egyenletek megoldásának gyakoroltatása mellett például a nevező gyöktelenítésére is.

Már most felvetődhet a szerkeszthetőség kérdése, amire az igenlő válasz megadható. Az eddigi ismeretek alapján az egységszakaszból — a $\sqrt{5}$ szerkesztésének felelevenítésével — a keresett felosztás elvégezhető, s a hasonlóságra hivatkozva tetszőleges másik szakasz is felosztható.

Harmadik osztályban a sorozatok tanítása a Fibonacci-sorozat fogalmának tisztázásával kezdődik. Érdemes megmutatni, hogy a Fibonacci-sorozat szomszédos elemeinek hányadosa közelítően az aranymetszésnél megismert 1,618... számot adja, s egyre nagyobb n-ekre az eltérés abszolút értéke egyre kisebb. Élesebb szemű tanulóink könnyen kimondják a tételt is: a Fibonacci-sorozat szomszédos elemeinek hányadosából képzett sorozat konvergens, és a határérték $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A tétel igazolására azonban csak a sorozatok határértékének tanítása és gyakoroltatása után térjünk rá, hiszen a bizonyítás — bár nem anyag, de az addig megismert tételek használatát igényli csupán — összetettsége miatt tanulóinknak nehézséget okozhat. Mégis érdemes tárgyalni, mert kevés olyan példával találkoznak, amelyben a monotonitásnak és a korlátosságnak, ebből következően pedig a határérték létezésének, majd a létező, de még ismeretlen határértéknek az átalakítások közbeni használatára szükség lenne.

Második és harmadik osztályban sem foglalkoztunk még az aranymetszés geometriai problémáival. Szándékosan kerültük el a szabályos ötszög és tízszög vizsgálatát, és nem beszéltünk az „aranytéglalapok" hálózatáról sem. Erre negyedikben, az ismétlési szakaszban kerülhet sor. A szakközépiskolák új negyedikes könyve (Herczeg János munkája) „A geometria és az algebra összekapcsolása" című fejezetét azzal a feladattal indítja, amelyben egy háromszöget kell egyik oldalából, a vele szemben levő szögéből, valamint az adott szög szögfelezője háromszögbe eső szakaszának hosszából megszerkeszteni. A megoldás jól felépítetten, logikusan írja le a szerkesztés lehetőségét, s két oldalról is rávilágít a szerkesztés módjára.

A pont körre vonatkozó hatványának ismétlésével az aranymetszés gondolatkörére is visszakanyarodhatunk. A tankönyvben leírt szerkesztés — megfelelő adatok helyettesítésével — lehetőséget ad arra, hogy az aranymetszés nagyobbik szeletének ismeretében a kisebbiket egyértelműen megszerkesszük. A szerkesztés előtt célszerű a már addig tanult ismereteket is áttekinteni, összefoglalni.

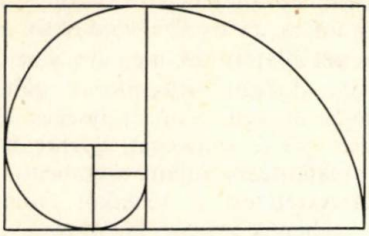
A síkgeometria alakzatai közül most már érdemes néhányat tüzetesebben megvizsgálni. A szabályos ötszögben könnyen bebizonyíthatjuk, hogy az átlók éppen az aranymetszés arányában osztják fel egymást, s két további tétel is egyszerűen igazolható:

a) a szabályos tízszög oldala annak az aranymetszésnek a kisebbik szelete, amelynek nagyobbik szelete a tízszög köré írt kör sugara;

b) a kör sugarával és a körbe írt szabályos tízszög oldalával mint befogókkal szerkesztett derékszögű háromszög átfogója a körbe írható szabályos ötszög oldala.

Érdekes, „aranytéglalapok" alkotta hálós ábrát nyerhetünk akkor, ha egy négyzet egyik oldalát úgy növeljük és egészítjük ki téglalappá, hogy a téglalap oldalainak aránya $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ legyen. Eljárásunkat úgy folytathatjuk, hogy a téglalap hosszabbik oldalára egy négyzetet szerkesztünk, és ezt tovább ismételjük. A szerkesztés természetesen az ellenkező, kicsinyítő irányban is folytatható. (Bebizonyítható, hogy az újabb, nagyobb tég-

lalapok hasonlók az elsőhöz, mert oldalaik aránya állandó.)



Ha az ábrán látható köríveket is megrajzoljuk, akkor az egymáshoz csatlakozó negyedkörök megközelítik az úgynevezett „logaritmikus spirálist"; az egymást követő ívek sugarai mindig $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$-szörösei a megelőzőnek.

Az aranymetszés matematikai alapjának lezárásaként, s főleg a későbbi, esetleges viták elkerülése érdekében, érdemes a Fibonacci-sorozat szomszédos elemeinek hányadosát újra kiszámolni néhány esetben, a közelítés — pontosság kérdését felvetni, s a 8; 5 vagy 13; 8 egységnyi oldalú téglalapokról is szót ejteni.

Tekintsük most már át, hogy az élet, a művészetek és más tudományágak mely területein lelhetjük meg az aranymetszés vagy a Fibonacci-sorozat számait, arányait!

Első példaként legkézenfekvőbb a növénytan, a biológia néhány élő szervezetének bemutatása. Ha a 360°-os szöget is felosztjuk az 1:1,618... arányban két részre, akkor az adódó 137,50776...°-os szög a flóra több növényén is fellelhető. A növények jelentős részénél olyan levélállás figyelhető meg — spirálissal megadható, szórt levélállás —, amelynek matematikai leírása során a Fibonacci-számokat kapjuk meg. A spirálisokra jellemző, jól ismert példaként említhető a margaréta és napraforgó virágzata, a fenyőtoboz, valamint más éghajlat növényeként az ananász termése is.

Az állatvilág is szolgál olyan példákkal, amelyeken aranymetszés mutatható ki. A tengeri csillag öt karja szabályos ötszögből nyerhető pentagramot határoz meg, míg a Nautilus nevű polipféle héjának növekedési vonalaiban — néhány esetben — az 1,618... arányú logaritmikus spirális ismerhető fel.

Vajon az emberi test felépítésében találkozhatunk-e az aranymetszés arányával? Érdekességként bemutatható Le Corbusier Modulorja, amelyen a testrészek méretei és méretviszonyai ezt tükrözik, azonban ennek reális alapja és tudományos értéke nincs.

Sajnos, ilyen „játék" több is kitalálható, csak ügyesen kell pontokat kiválasztani, összekötni, megfelelően kell kerekíteni, „pontosítani", és máris aranymetszés, vagy az ennek megfelelő pentagram található például Leonardo Mona Lisa című világhírű művén vagy Csontváry több festményén is. Ezek a példák már elvezetnek az aranymetszés filozófiai problémáihoz is. Tény, hogy az élő környezetben gyakran találkozhatunk aranymetszéssel, és tény az is, hogy művészekre és csoportokra is (például Section d'or) hatással volt. Ilyen művekre azonban csak akkor hivatkozhatunk, ha az alkotók tudatosan törekedtek az arány érzékeltetésére, vagy ez igazolhatóan kifejezésre jutott. Itt a látszat, a közelítés nem lehet bizonyító erejű.

Említsünk néhány példát — csupán felsorolás jelleggel — arra, ahol az aranymetszés szóba került vagy bizonyítható! Az építészetben a görög templomok között nem található aranymetszés szerint tervezett (a Parthenon sem), de Le Corbusier megvalósított épületei közül a Garches-i villa, a moszkvai Centroszojuz épülete vagy a párizsi egyetemi város Svájci-pavilonja tudatosan így készült.

A festészet alkotásai közül nem bizonyítható, hogy a Mona Lisanak köze lenne az aranymetszéshez, ugyanígy Leonardo Szent Jeromos az oroszlánnal című festményén sem igazolható tudatosság. Valószínű, hogy Mondrian több képén is megtalálható; a négyzeteket és téglalapokat elválasztó fekete vonalak mértanilag előre tervezettek és számítottak. Uitz Béla aranymetszésben tervezte a

sztálingrádi csatát ábrázoló triptychonját.

Eddigi példáink csupán térbeli elrendezésben mutatták az aranymetszést. Két alkotónál egy-egy időtartam aranymetszés szerinti felosztása biztosan megtalálható. Eizenstein Patyomkin cirkáló című filmjében a drámai csúcspont, a vörös zászló felhúzása úgy osztja két részre a filmet, hogy az első és második rész idejének hányadosa megközelítően 1,61. Lendvai Ernő fedezte fel és bizonyította be, hogy Bartók Béla több szerzeményében, így például a Zene húros hangszerekre, ütőkre és celestára című művének első tételében is az ütemek számában, a csúcspontnál stb. a Fibonacci-számok mutathatók ki.

1982-ben jelent meg Falus Róbert Az aranymetszés legendája című könyve a „Gyorsuló idő" sorozatban. Korrekt eljárással bírálja több kutató hibás következtetéseit, amelyekkel egyes művekben „felfedezték" az aranymetszést. Segítségével a tanításban, különösen a matematika tanításában megengedhetetlen pontatlanságok elkerülhetők, és további példák is fellelhetők.

Eddigi utalásaink egyike sem mutatta, hogy a történészek is használhatnák a Fibonacci-számokat vagy az aranymetszést. A Fizikai Szemle 1981-ben megjelent 12. száma Beöthy Mihály—Fehér András—Ferenczné Árkos Ilona—Ferencz Csaba cikkét közli Egy régi kor kozmológiájának emléke: a magyar Korona címmel. A Korona méreteinek meghatározásával és az arányok kiszámításával az aranymetszés viszonyszámához jutottak, és további elemzések alapján is azt állapították meg, hogy az esetlegesen, durván összeállított műtárgy teóriáját el kell vetni. Egységes elvek alapján, jól és tudatosan ilyenre tervezett műalkotással állunk szemben.

Természetesen a témakör tanítását akkor tehetjük igazán élményszerűvé, ha a matematikaórák gyakorlatában kissé szokatlan módon a felsorolt példákat nemcsak ábrákon, hanem diapozitívekkel, reprodukciókkal is szemléltetjük, s nem szabad attól sem visszariadnunk, hogy hanglemezt forgassunk le tanítványainknak.

Ahol az idő rövidsége nem teszi lehetővé, hogy matematikaórán kerítsünk sort zenehallgatásra, a festmények, épületek és például Le Corbusier modelljének bemutatására, ott az osztályfőnökökkel egyeztetve — a tanterv biztosította — aktuális témákra fordítható osztályfőnöki órák egyikét is felhasználhatjuk. A matematikai ismeretek tanítása után a filozófia, a tudományok és a művészetek szintézisének megteremtésére a világnézetünk alapjai, illetve a bevezetés a filozófiába tantárgy is keretül szolgálhat.

Az aranymetszés filozófiai tartalmát vizsgálva el kell vetnünk az olyan nézeteket, amelyek „tökéletes arányként" kezelik, mint szellemi erőt a világ mozgatójaként értékelik.

LÉNÁRT ISTVÁN
laboráns
Orvostovábbképző Intézet, Budapest

Axiomatizálás a gömbfelületen

A huszadik század végére a matematika a kiválasztott kevesek tudományából az emberiség közös világnyelvévé válik: a természettudományok, gazdasági élet, kereskedelem moccanni sem tudnak nélküle; közvetlen, mindennapos élettársunk lett. Mégis kevés tudományban van akkora szakadék a valóban elért tudásszint és a közkinccsé vált ismeretanyag között, mint éppen itt! A legnagyobb probléma talán nem is a konkrét iskolai tudásanyag sok évszázados lemaradása a mai eredmények mögött, hanem annak a szemléletmódnak, felfogásnak, kérdezési és felelési módszernek a hiánya, meg-nem-tanítása, aminek alapján a diák

vagy a majdani felnőtt önállóan beleválhat egy-egy modern matematikai részterület meghódításába. Ennek a szemléletmódnak, felfogásnak a sarkköve pedig, véleményem szerint, az *algebrai-axiomatikus módszer,* ami az utolsó százötven év matematikai fejlődésének egyik legfőbb forrása és ösztönzője volt. Egyrészt nincs olyan ága a mai matematikának, amelyik ne próbálkozna önálló axiómarendszer és algebrai apparátus kialakításával, — másrészt teljesen távol eső területek közt sikerült nem is sejtett összefüggéseket feltárni megfelelő axiómarendszerek segítségével. A matematikaoktatás pedig éppen az axiomatizálás módszereit nem, vagy alig közvetíti. Még a végzős középiskolások is valójában csak két axiómarendszert tartanak a valósággal és a józan ésszel egyedül összeegyeztethetőnek: a számok birodalmában az összeadás-szorzás „egyszeregyes" rendszerét, a geometria birodalmában pedig az egyenes-sík euklideszi axiómarendszerét. Ez egyrészt gondolkodásbeli megmerevedéshez, beszűküléshez vezet: ahhoz a teljesen hamis következtetéshez, hogy egy lényegében lezárt, befejezett, már csak apró részletkérdésekben javítható, és éppen ezért nem is igazán érdekes tudományról van szó; másrészt még a két „természetes" rendszer szempontjából is káros, mert a diákok sem a számelméletben, sem a geometriában nem kapnak összehasonlítási, ellenőrzési lehetőséget „természetesnek" vélt fogalmaik mélyebb megértéséhez.

Ennek az ellentmondásnak a feloldásához olyan axiómarendszerekre van szükség, amelyek egyrészt tizenéves emberek számára is meggyőző és kézzelfogható módon modellálhatók, bemutathatók; másrészt viszont olyan algebrai apparátushoz vezetnek, amely még ugyanezeket a tizenéveseket is meghökkenti az általuk ismert rendszerektől való eltérésével, másféleségével.

Ez a cikk egy ilyen axiomatizálásra tesz kísérletet. Az elmélet alapjait tizenhárom-tizennégy éves gyerekek megérthetik; az anyag teljes feldolgozását a tizenhat év körüli korosztály számára tartom lehetségesnek. Persze a gömbi geometria legegyszerűbb alapfogalmainak tanítása kilenc-tízéveseknek — sok más előnye mellett — a későbbi axiomatizálást is nagyon megkönnyítené.

Szeretném végül megjegyezni, hogy a tárgyalt anyag körülbelül tizenöt éves tudományos múltra tekint vissza, és a modern matematikai kutatás egyik legközpontibb, legforrongóbb, legtöbbet ígérő területére vezet.

1. Hogyan lehet a gömbfelületen geometriát felépíteni?

Ehhez először tisztáznom kell, hogy mit jelent egy *akármilyen* felületen geometriát felépíteni. Veszem az összes olyan alakzatot, amelyet a felületbe beleilleszthetek, belerajzolhatok, és kiválasztom közülük azt, amelyiket legegyszerűbbnek, legbonthatatlanabbnak, legelemibbnek érzek: erre az *alapidomra* próbálom visszavezetni a felület összes többi alakzatát.

Hogyan csináltuk a síkfelületen? Legegyszerűbb alakzatnak a *pontot* választottuk. Ezután a lehetséges vonalak közül kerestünk legegyszerűbbet: az *egyenes vonalat.* A pontnak mint alapfogalomnak kiválasztását csak érzésekkel indokolhattuk („rábökünk és már ott van" stb.), de az egyenes vonal kiválasztását már visszavezethetjük pontokra: két különböző pont között legrövidebb út az egyenes vonal, — két különböző ponton át mindig egy egyenes húzható, vagyis két különböző pont mindig meghatároz egy egyenes vonalat. Fordítsuk meg ezt az utolsó kérdést: meghatároz-e két különböző egyenes vonal pontot? Két eset lehetséges: ha a két egyenes metszi egymást, akkor meghatározzák a közös metszéspontjukat; — ha viszont párhuzamosak, akkor nem határoznak meg közös pontot.

Hogyan indítsunk a gömbön? Itt is a *pont* látszik legegyszerűbb alakzatnak, alapidomnak, ugyanolyan „csak rábökünk" érvek alapján, mint a síkon.

A lehetséges vonalak közül pedig a *főkör*, a legnagyobb gömbi kör kínálkozik legegyszerűbbnek, hasonló érvek alapján, mint a síkon: két gömbi pont között nincs rövidebb út a főkörnél, és két különböző gömbi pont *általában* meghatároz egy, mind a kettőjükön átmenő főkört. Van-e kivétel? Igen: ha a két pont egymással éppen *átellenes*, vagyis egymás Északi- és Déli-sarkpontjai; ebben az esetben minden olyan főkör, amely az egyik ponton átmegy, átmegy a másik, vele átellenes ponton is.

Ahogy a síknál tettük, fordítsuk meg itt is ezt az utolsó kérdést: meghatároz-e két különböző gömbi főkör pontot? Két fontos különbséget tapasztalunk a síkhoz képest: egyrészt két különböző gömbi főkör *mindig* metszi egymást (nincs párhuzamosság), másrészt viszont nem egy, hanem két, egymással átellenes metszéspontjuk van.

2. Szomorúan látjuk, hogy sem a síkon, sem a gömbön nem sikerült a következő, egyszerű visszafordítást végrehajtani:

„Két különböző pont mindig meghatároz egy egyenest, és két különböző egyenes mindig meghatároz egy pontot",

vagy:

„Két különböző pont mindig meghatároz egy főkört, és két különböző főkör mindig meghatároz egy pontot",

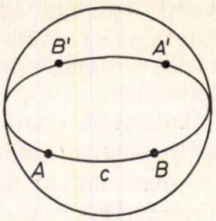
mert a síkon a párhuzamosság, a gömbön az átellenesség elrontotta a dolgot. Van viszont egy trükk, amellyel a gömbön elintézhetjük ezt a problémát:

Ne a gömbi pontot tekintsük alapidomnak, hanem a gömb *átellenes pontpárjait*, vagyis minden egyes ponthoz számítsuk hozzá a vele átellenes pontot is!

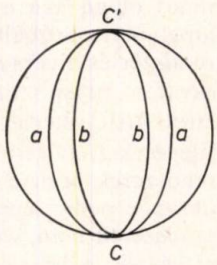
Ez a program azért hajtható végre, mert minden egyes gömbi pont egyértelműen meghatározza a vele átellenes pontot is, tehát a gömbi pontokat *lehet* ilyen párokba csoportosítani.

Mit nyerünk ezzel az alapidom-változtatással?

Két különböző átellenes pontpár mindig meghatároz egyetlenegy olyan főkört, amely a két átellenes pontpárnak mind a négy pontján átmegy:



Két különböző főkör egymást mindig egy átellenes pontpár két pontjában metszi.



Tehát a következő, teljesen általános szabályhoz jutunk, amelyet semmiféle kivétel nem terhel:

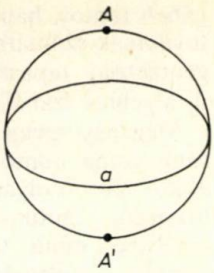
Két különböző átellenes pontpár mindig meghatároz egy főkört, — és két különböző főkör mindig meghatároz egy átellenes pontpárt!

3. Ebből a gyönyörű szimmetriából azt a tanulságot mindenesetre levonhatjuk, hogy a pontnak alapidommá való kinevezése mégsem annyira kétségbevonhatatlan, mint azt első nekifutásra gondolhattuk: az átellenes pontpárok itt használhatóbbaknak bizonyultak.

Ezen felbátorodva most továbblépünk, és megint új alapidomot keresünk gömbi geometriánkhoz.

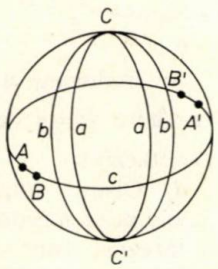
Kezdjük egy földrajzi hasonlattal: Van egy üres gömböm, amire a Föld térképét akarom felrajzolni. Ehhez először is kitűzöm valahol az Északi-sark helyét. Kérdezem most: milyen további földrajzi helyeket határoztam meg egyértelműen ennek az egy pontnak a lerögzítésével? Az Északi-sark meghatározása egyértelműen meghatározza a Déli-sark helyét is meg az Egyenlítő főkörének helyét is. Ezért most azt mondom, hogy gömbi geometriánk felépítéséhez nem érdemes ponttal és főkörrel külön-külön vesződni! Vegyük alapidomnak *a gömb egy átellenes pontpárját és a hozzá tar-*

tozó, egyetlenegy egyenlítői főkört! Az alapidom: *A* és *A'* és *a* EGYÜTTVÉVE!



4. Vegyünk fel két, nem átellenes gömbi pontot, *A*-t és *B*-t, és a rajtuk átmenő, egyetlen főkört, *c*-t! Tudjuk már, hogy itt az *A* ponttal átellenes *A'* pont is, meg a *B* ponttal átellenes *B'* pont is a *c* főkörre esik. Vegyük fel most az *A* ponthoz tartozó *a* egyenlítői főkört, és a *B* ponthoz tartozó *b* egyenlítői főkört, és keressük meg ennek a két főkörnek a metszéspontpárját: azt a csodálatos tényt tapasztalhatjuk, hogy ez a metszéspont-pár éppen a *c* főkörhöz tartozó *C*, *C'* sarkpontpár lesz.

Hogyan fogalmazhatjuk meg ezeket az eredményeinket az új alapidomok nyelvén?



Ha veszünk egy ELSŐ alapidomot, amely az *A*, *A'* átellenes pontpárból és az *a* egyenlítői főkörből áll, — és egy MÁSODIK alapidomot, amely a *B*, *B'* átellenes pontpárból és a *b* egyenlítői főkörből áll, — akkor ezek ketten meghatároznak egy HARMADIK alapidomot, amely a *C*, *C'* átellenes pontpárból és a *c* egyenlítői főkörből áll.

Vagyis: Ha a gömbfelületet olyan alapidomok halmazának tekintjük, amelyek mindegyike egy átellenes pontpárból és a hozzá tartozó egyenlítői főkörből áll, akkor ez a szemlélet arról győzött meg, hogy ennek a halmaznak akármelyik két különböző eleme egyértelműen meghatároz egy harmadik, ugyanilyen, tehát ugyanebbe a halmazba tartozó elemet. Azaz: egy kételemes, bináris művelettel állunk szemben!

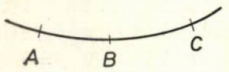
5. Ezen a ponton ajánlatos bemutatni vagy átismételni a bináris művelet fogalmát: Adott egy halmaz, amelyből kiemelek egy ELSŐ elemet, utána egy MÁSODIK elemet; ebben a halmazban akkor ismerek egy bináris műveletet, ha ehhez az „Előbb az ELSŐ elem, utána a MÁSODIK elem" párhoz mindig hozzá tudok rendelni egyetlenegy elemet *ugyanebből* a halmazból. Példák: összeadás a természetes számok közt — de a kivonás már nem! — ehhez az egész számok halmaza kell. Vagy: hatványozás a természetes számok közt — nem kommutatív! Vagy: pingpong-bajnokság az osztályban: mindenki mindenkivel játszik, és mindegyik párnak kell egy mérkőzésvezető bírót választani — ugyanebből az osztályból. Vagy: az egész számok 0-tól 9-ig, az összeadásra nem adnak műveletet, mert $5+6=11$ már kilóg a halmazból, — de az összeg utolsó számjegye legyen az eredmény: ez már művelet! A műveletek tulajdonságai közül emeljük ki a kommutativitást, esetleg az aszszociativitást, és az „egyszerűsítési" szabályt: $a+b=a+c$-ből $b=c$ következik; $a \cdot b=a \cdot c$-ből $b=c$ következik (ha $a \neq 0$)!

6. Térjünk vissza a gömbi alapidomok közt értelmezett műveletre! Jelöljük az alapidomokat vastag kisbetűkkel: **a**(*A*, *A'*, *a*) jelenti az *A*, *A'* átellenes pontpárból és az *a* egyenlítői főkörből álló alapidomot. A műveletet pedig jelöljük így: **a**∼**b**=**c**; szóban: **a** bumm **b** egyenlő **c**-vel. Nagyon fontosnak tartom, hogy tudatosítsuk a gyerekekkel a leírt művelet pontos jelentését, és hogy, legalábbis az elején, ragaszkodjunk ehhez a sokkolóan másféle jelölésmódhoz: kezdők számára ugyanis az összeadás vagy szorzás jelének átvétele fogalomzavarhoz és itt érvénytelen műveleti szabályok mechanikus alkalmazásához vezethet.

7. Következő feladatunk a gömbi művelet tulajdonságainak vizsgálata a gömbi geometria alapján.

a) A kommutativitás könnyen adódik: $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{b} \sim \mathbf{a}$. Mutassuk meg, hogy ennek belátásához az alapidomokból akár a pontokat, akár a főköröket kiemelhetjük: „az A és B pontokon át, sorrendjüktől függetlenül, ugyanaz a c főkör megy keresztül" vagy „az a és b főkörök, sorrendjüktől függetlenül, ugyanabban a C, C' átellenes pontpárban metszik egymást" ugyanahhoz az algebrai megfogalmazáshoz vezetnek.

b) Igaz-e itt az „egyszerűsítési„ szabály? Azaz: ha $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c}$, akkor következik-e ebből, hogy feltétlenül $\mathbf{b} = \mathbf{c}$? A kérdés megválaszolásához először lássuk, hogy mit jelent geometriailag a kiindulási $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c}$ feltétel. Ha a három alapidomból kiragadom az A, B és C pontokat, akkor az $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ kifejezés az A és B pontokon áthaladó főkört jelenti, az $\mathbf{a} \sim \mathbf{c}$ kifejezés pedig az A és C pontokon áthaladó főkört. Ha ez a két főkör azonos, akkor ez éppen annyit jelent, hogy az A és B pontok ugyanarra a főkörre esnek, mint az A és C pontok, — vagyis, hogy az A, B, C pontok mindhárman ugyanarra a főkörre esnek:



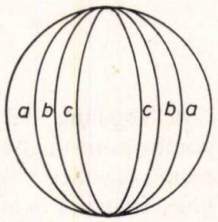
Igaz-e, hogy itt $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c}$-ből $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ következik? Vagyis igaz-e, hogy az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha a B pont egybeesik a C ponttal? Természetesen nem igaz, ahogyan a rajz is mutatja: itt tehát az „egyszerűsítési" szabály nem érvényes!

Van-e akkor valami más szabály, ami igaz? A rajz kínál egy ötletet:

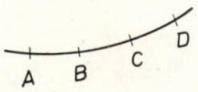
Ha az A ponton át és a B ponton át ugyanaz a főkör megy, mint az A ponton át és a C ponton át, — akkor ugyanennek a főkörnek kell átmennie a B ponton is és a C ponton is. Hogyan lehet ezt a geometriailag teljesen nyilvánvaló tényt megfogalmazni a mi, most születő algebránk segítségével? Úgy, hogy: Ha $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c}$, akkor ebből $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c} = \mathbf{b} \sim \mathbf{c}$ is következik!

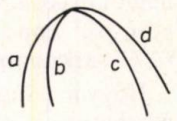
Ez a gondolatmenet nemcsak önmagában fontos, hanem mint módszer is a továbbiak számára: egy teljesen triviális geometriai tapasztalat meghökkentően új algebrai szabállyá változik!

Még egy megjegyzés: Itt is indíthattunk volna pontok helyett főkörökkel: akkor három olyan főkörhöz jutunk, amelyek mind a hárman ugyanabban az átellenes pontpárban találkoznak.



c) Jó ellenőrzés arra, hogy a gyerekek valóban megértették-e az előző tulajdonságot: Mi következik az $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{c} \sim \mathbf{d}$ egyenlőségből? Akár a megfelelő pontokból, akár a megfelelő főkörökből kiindulhatunk:





Az eredmény: $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{c} \sim \mathbf{d}$-ből

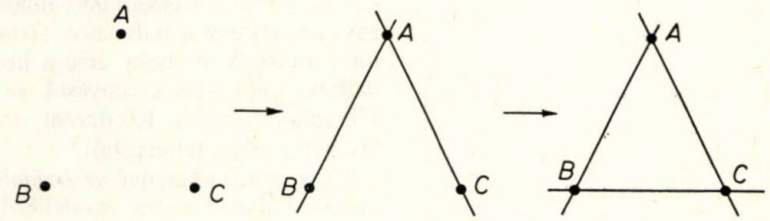
$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} = \mathbf{c} \sim \mathbf{d} = \mathbf{a} \sim \mathbf{c} = \mathbf{b} \sim \mathbf{d} = \mathbf{a} \sim \mathbf{d} = \mathbf{b} \sim \mathbf{c}$$

következik!

d) Olyan tulajdonság következik, amely néha megdöbbenti és elcsüggeszti a tárggyal ismerkedőket: Milyen elemet határoz meg két *azonos* elem? Hogy a kérdés jogos, azt az ismerős műveletek akármelyikével igazolhatjuk: $3+3=6$; $3 \cdot 3 = 9$; $3^3 = 27$ stb. Mi a helyzet a gömbi alapidomoknál? Induljunk ki egy A pontból és egy B pontból, amelyek ketten egy c főkört határoznak meg! Toljuk most a B pontot a c főkör mentén az A pont felé: a két pont minden esetben a c főkört határozza meg. De mihelyt a B pont beér az A pontba, az addig rögzített c főkör elszabadul: *akármelyik*, A-ra illeszkedő főkört vehetem eredményül! És minthogy így nem tudok az $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}$ művelethez *egyértelmű* eredményt rendelni, ezért ezt a műveletet kénytelen vagyok *értelmezhetetlennek* és így *értelmezetlennek* tekinteni.

Egy jól bevált ellenérv azoknak, akik ebből a kudarcból az egész rendszer használhatatlanságára következtetnek: Hiszen az „egyszeregyes" rendszer sem tudja értelmezni a 0-val történő osztást! Tekintsük hát ezt az $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}$ értelmezetlenséget ugyanolyan lyuknak az elméletünkön, mint a szorzás-osztásnál a 0-val való osztás tilalmát, és lássuk, hogy mire jutunk! De akkor egyértelműen le kell szögeznünk: Minden felírt gömbi műveletünknél meg kell vizsgálnunk, hogy az „összeművelendő" elemek nem azonosak-e — ugyanúgy, ahogyan minden osztásnál ellenőriznünk kell, vajon nem nulla-e az osztó.

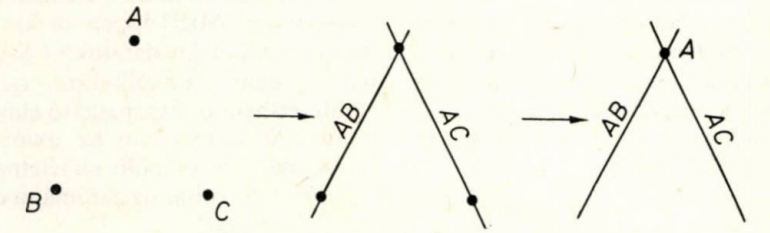
e) Legyenek **a, b, c** mind mások, és tegyük fel, hogy $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \neq \mathbf{a} \sim \mathbf{c}$; akkor egyúttal $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \neq \mathbf{a} \sim \mathbf{c} \neq \mathbf{b} \sim \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ is igaz, vagyis akkor $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \sim \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \sim \mathbf{c}$ is mind mások. Miért? Ragadjuk ki az **a, b, c** alapidomokból az *A*, *B*, *C* pontokat! Ha most $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \neq \mathbf{a} \sim \mathbf{c}$, akkor az *A* és *B* által meghatározott főkör nem lehet azonos az *A* és *C* által meghatározott főkörrel, — de akkor *B* és *C* egy harmadik főkört kell, hogy meghatározzon:



vagyis, akkor *A*, *B*, *C* egy valódi háromszöget ad. Nevezzük az ilyen **a, b, c** hármast *valódi háromidomnak*!

f) Adott egy ilyen **a, b, c** valódi háromidom; ennek az elemeire mindig igaz, hogy $(\mathbf{a} \sim \mathbf{b}) \sim (\mathbf{a} \sim \mathbf{c}) = \mathbf{a}$.

Hogy-hogy? Indítsunk pontokkal: az **a, b, c** alapidomokból kiragadjuk az *A*, *B*, *C* pontokat: ezek valódi háromszöget adnak. *AB* jelenti a háromszög *A* és *B* pontját összekötő oldalát, *AC* jelenti a háromszög *A* és *C* pontját összekötő oldalát. De akkor: az *AB* főkör és az *AC* főkör metszéspontja *visszaadja* az *A* pontot.



Ezt a tulajdonságot nemcsak azért érdemes alaposan megismertetni, mert egyik kiindulópontja lesz minden további fejtegetésünknek, hanem azért is, mert megint gyönyörű példáját láthatjuk a triviális geometriai igazság meghökkentően új algebrai szabállyá történő átalakulásának!

8. Összeszedtük a gömbi művelet néhány tulajdonságát: ezt a gyűjtögetést még sokáig folytathatjuk, mert ismerjük már annak a módszernek a lényegét, amivel a gömbi geometria bizonyos tulajdonságait átfogalmazhatjuk a gömbi alapidomok közt értelmezett művelet nyelvére.

Ehelyett azonban most a következőt kérdezem: Egyformán fontosak-e mindezek a tulajdonságok? Nincsenek-e köztük olyanok, amelyekből valamelyik másikat már le tudnánk vezetni?

Válasszuk ki például a következő három tulajdonságot:

I. $a \sim a$ értelmezetlen,

II. $a \sim b = b \sim a$,

III. $(a \sim b) \sim (a \sim c) = a$.

Most pedig BEBIZONYÍTOM, hogy ebből a három tulajdonságból már következik a negyedik tulajdonság, mégpedig: Ha a, b, c mind mások, és $a \sim b = a \sim c$, akkor $a \sim b = a \sim c = b \sim c$ is igaz!

Mert: tegyük fel, hogy igaz ugyan az $a \sim b = a \sim c$ egyenlőség, de ennek ellenére $a \sim b \neq b \sim c$; és akkor persze $a \sim c \neq b \sim c$. Ha viszont $a \sim b \neq b \sim c$, akkor az $(a \sim b) \sim (b \sim c)$ kifejezésnek értelme kell, hogy legyen, mert az I. tulajdonság nem szólhat bele a dolgomba. És ugyanígy: az $(a \sim c) \sim (b \sim c)$ kifejezésnek is értelme kell, hogy legyen. Azaz: a kiindulásul vett $a \sim b = a \sim c$ egyenlőség mind két oldalát „beszorozhatom" $b \sim c$-vel:

$$a \sim b = a \sim c,$$

$$(a \sim b) \sim (b \sim c) = (a \sim c) \sim (b \sim c),$$

de innen a III. tulajdonság szerint

$$b = c$$

következik, — ami ellentmond annak a kiindulási feltételnek, hogy a, b, c mind mások! Ebből a csapdából csak úgy menekülhetek, ha felteszem, hogy a beszorzás, éppen az I. tulajdonság miatt, *végrehajthatatlan:* mert

$$a \sim b = a \sim c = b \sim c!$$

9. Összefoglalva: kiválasztottuk a gömbi alapidomok között értelmezett művelet három tulajdonságát, és levezettük belőlük ugyanennek a műveletnek egy negyedik tulajdonságát.

Most már csak azt az apróságot kell tisztáznunk, hogy mi értelme volt ennek az egésznek? Ha a három induló tulajdonságot is, meg a levezetett negyediket is világosan látni lehetett a gömbön, akkor mit nyertünk a **8.** bizonyítással?

Ha csakis a gömb érdekel minket, akkor nem sokat!

DE!

Nézzük meg újra ezt a három tulajdonságot! Tudjuk, hogy a gömbön szerzett tapasztalatainkból születtek — DE ŐK NEM TUDJÁK! Mi lenne — kérdezem —, ha elszakadnánk a gömbtől, és csakis ennek a három tulajdonságnak a következményeivel törődnénk? Vagyis azt mondom: Legyen adott egy AKÁRMILYEN halmaz, amelyről csak két dolgot teszek fel: először, hogy létezik benne egy művelet, amely a halmaz akármelyik két eleméhez egyértelműen hozzárendel egy, ugyanebbe a halmazba tartozó elemet; másodszor, hogy erre a hozzárendelésre, műveletre érvényesek az I., II., III. tulajdonságok. Kérdezem: mit lehet levezetni ennyi feltevésből?

Ez a gondolatmenet az *axiomatizálás* alapja. Kiindulok egy modellből, önkényesen kiválasztom bizonyos tulajdonságait: kinevezem őket alaptulajdonságoknak, *axiómáknak;* és most két dolgot kérdezek:

Mi következik *csak* az axiómákból?

Milyen más lehetséges megvalósulásai, modelljei vannak ennek az axiómarendszernek az eredeti, indító modellen kívül?

10. De milyen alapon választom ki az axiómáimat? Miért éppen azokat választom ki, amiket kiválasztok? CSAK! Ezt mással nem indokolhatom, csak egy olyan, érthető és használható elmélet felállításával, amely erre az axiómarendszerre épül. A ráépülő elméletnek kell, *visszafelé*, igazolnia az axiómáim célszerű megválasztását!

Azért érdemes ilyen félreérthetetlenül fogalmazni, hogy a gyerekek világosan láthassák: mi a különbség az alaptulajdonságok önkényes kiválasztása és az ezután következő tétel- és bizonyításláncok szigorú logikája, egymásra épülése között.

11. A következőkben tehát nem a gömb geometriájának kizárólagos vizsgálatára szorítkozunk, hanem egy olyan axiómarendszert tanulmányozunk,

amelynek a gömbi alapidomok és a köztük értelmezett művelet csak egyik lehetséges modelljét adják.

Az axiómáink tehát:

Adott egy halmaz, benne egy kételemes, bináris művelet, amely a halmaz akármelyik két eleméhez hozzárendel egy, ugyanebbe a halmazba tartozó elemet; és feltesszük, hogy erre a hozzárendelésre, műveletre a következő axiómák érvényesek:

I. $a \sim a$ értelmezetlen,

II. $a \sim b = b \sim a$,

III. $(a \sim b) \sim (a \sim c) = a$.

Nevezzük el mindazokat a halmazokat, amelyekben ilyen művelet létezik, *egyféle alapelemre épülő projektív síkoknak* — de pillanatra se felejtsük: ezek nem síkok és nem is gömbök; mindegyik csak az és annyi, amennyi az őt definiáló axiómákból következik!

12. Újraolvasva a **8.** levezetést, azt láthatjuk, hogy ott kimondtunk egy olyan állítást, amihez csakis a három axiómára volt szükség, — és utána ugyanennek a három axiómának a segítségével be is bizonyítottuk ezt az állítást. Vagyis: egy olyan *tételre* bukkantunk, ami minden, a **11.** definíció szerinti projektív síkon igaz:

Ha **a**, **b**, **c** egy projektív sík három, feltétlenül különböző eleme, amelyekre igaz az $a \sim b = a \sim c$ egyenlőség, — akkor feltétlenül igaznak kell lennie az $a \sim b = a \sim c = b \sim c$ egyenlőségeknek is *(egyidomossági tétel)*.

13. Létezik-e egyáltalán a gömbi alapidomokon kívül más modellje is axiómarendszerünknek?

A gömbi alapidomok halmaza végtelen sok elemből állt. Legyen most a halmazomnak összesen három eleme: **p**, **q**, **r**; a kételemes műveletet pedig így határozom meg:

$$p \curlywedge q = q \curlywedge p = r,$$

$$p \curlywedge r = r \curlywedge p = q,$$

$$q \curlywedge r = r \curlywedge q = p.$$

Vagyis akármelyik két elemet akármilyen sorrendben „összeművelve" a harmadik elemet kapjuk eredményül. Kérdés: kielégíti-e ez a halmaz, ezzel a „$\curlywedge$" művelettel, a három axiómánkat?

Az I. axiómát könnyen teljesíthetjük: egyik elemnél sem értelmeztük az önmagával vett műveletet. A II. axióma azért teljesül, mert két elem összeművelésének eredménye mind a két lehetséges sorrendben ugyanaz; például $p \curlywedge q = q \curlywedge p = r$. Végül a legnehezebb: a III. axióma! Vegyük a $(p \curlywedge q) \curlywedge (p \curlywedge r)$ műveletet: ennek a III. axióma szerint **p**-vel kellene egyenlőnek lennie — hát lássuk! A művelet értelmezése szerint: $p \curlywedge q = r$, $p \curlywedge r = q$, és akkor: $(p \curlywedge q) \curlywedge (p \curlywedge r) = r \curlywedge q$, márpedig: $r \curlywedge q = p$; tehát csakugyan: $(p \curlywedge q) \curlywedge (p \curlywedge r) = p$ — ahogy a III. axióma megköveteli! Ugyanígy végigszámolva;

$$(p \curlywedge q) \curlywedge (q \curlywedge r) = r \curlywedge p = q,$$

$$(p \curlywedge r) \curlywedge (q \curlywedge r) = q \curlywedge p = r.$$

Tehát: ez a háromelemű halmaz, ezzel a „$\curlywedge$" művelettel, valóban a **11.** definíciónak megfelelő projektív sík.

14. Egy módszer véges sok elemből álló halmazban értelmezett kételemes, bináris művelet leírására: a *művelettábla:* egy sakktábla-elrendezés, annyi sorral és oszloppal, ahány eleme van a halmazunknak. Felülre és balra írom azonos sorrendben az elemeket, két elem szorzatát pedig a megfelelő sor és a megfelelő oszlop kereszteződéséhez írom.

Például az előző pont háromelemes síkjának művelettáblája:

	p	q	r
p	–	r	q
q	r	–	p
r	q	p	–

A tábla főátlója az I. axióma miatt üres; a tábla a II. axióma miatt szimmetrikus a főátlóra.

Még egy projektív sík; hételemes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Ennek művelettáblája:

	0	1	2	3	4	5	6
0	–	0	1	0	3	3	1
1	0	–	6	0	6	2	2
2	1	6	–	5	6	5	1
3	0	0	5	–	4	5	4
4	3	6	6	4	–	3	4
5	3	2	5	5	3	–	2
6	1	2	1	4	4	2	–

Körülbelül ennyit lehet afféle „bevezető étvágygerjesztőnek" feltálalni. Mint láthattuk, ez a bevezető rész is a mai algebra-geometria sok jellemző és fontos fogalmán vonult végig: a gömbi geometria alapjai, az absztrakt művelet fogalma, geometriai tapasztalatok algebrai megfogalmazása, axiomatizálás, tétel és bizonyítás egy axiómarendszerben, végtelen és véges modellek stb. A továbblépéshez majd a művelet visszafordíthatóságának kérdése, a reláció fogalma, egymással ekvivalens axiómarendszerek értelmezése szükséges.

KALLÓS KÁROLY
gimnáziumi tanár
Győr

A húr függvénykapcsolatai

A tárgykör bemutatása

A matematika egyes részterületeinek fejlődéstörténete betört a köztudatba. Így például meglehetősen ismert a számírás, a helyiérték, a görbe alatti terület, a koordinátás ábrázolás, az egyenlettechnika vagy a logaritmus problémaköre — de a trigonometria kezdeteiről csak futó megjegyzésekkel találkozhatunk. Sain Márton a Matematikatörténeti ABC-ben írja, hogy az első valódi sinustáblázat a hindu „Szurija Sziddhanta"-ban található. Mi volt előtte?

A trigonometria a ma ismert építménytől tartalmilag és formailag is különbözött. Tartalmilag az ókori definíció nem támaszkodik a derékszögű háromszögre, formailag pedig az Euler által bevezetett jelölések eredményezték a könnyebb kezelhetőséget. Itt érdemes megjegyezni, hogy még ezt a jelölést is hasznos lenne ésszerűsíteni, mert néha zavart okoz, hogy *betűcsoport* jelöl *egy* függvényt.

Az ókor geocentrikus világképében egy bolygó 2 különböző helyzete húrt határozott meg az egységnyi sugarúnak tekinthető gömbben. E húr hossza csak a középponti szög függvénye volt. Két dimenzióban: az egységnyi sugarú félkörben a húr növekedése-fogyása a hozzá tartozó középponti szög ugyanolyan értelmű változását eredményezi. Mivel ez a függvénykapcsolat nem lineáris, azért az értékpárokat előbb tapasztalati, később számításos úton táblázatba foglalták. Így keletkezhettek a húrfüggvénytáblázatok.

A húr függvénykapcsolatai

Hogyan építhetnénk fel ilyen „őstrigonometriát", azaz: húrfüggvényrendszert? — Az alapfeladat: ismert sugarú körben az adott középponti szöggel szemközti húrt kell kiszámítani — vagy fordítva. Ma ezt úgy végezzük, hogy helyettesítünk a

$$h = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

képletbe. Érdekessége mellett azonban hasznos is lehet a húrt — mint a középponti szög függvényét — *definiálni.*

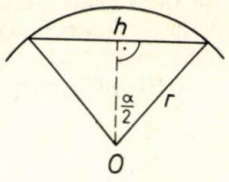
Értelmezés. A húrfüggvény megmutatja, hogy egységnyi sugarú körben mekkora

húr tartozik az adott középponti szöghöz.

Kiszámítása. Az α középponti szög húrfüggvényét megkapjuk, ha a szöghöz tartozó húrt elosztjuk a kör sugarával:

$$H(\alpha) = \frac{h}{r}, \quad r \neq 0.$$

Ez a hányados dimenzió nélküli, a sugár léptékében vett relatív érték.



1. ábra

A $H(\alpha)$ függvény értékei. Egységnyi sugarú kört rajzolunk, ebben megválasztjuk az α középponti szöget ($0° \leqq \alpha \leqq 360°$). A sugarak végpontjai közötti szakasz mértékszáma $H(\alpha)$; $r=1$ miatt ez csak az α-tól függ.

A húrfüggvény viselkedése. A 0°-os szöghöz 0 hosszúságú húr tartozik, tehát $H(0°)=0$. 60° esetében szabályos háromszög keletkezik, tehát $H(60°)=1$. Ismert módon az egyenesszög eléréséig a húr szigorúan monoton növekszik, ha α-t növeljük, és $H(180°)=2$. A szög további növekedésekor a két sugárvégpont közötti távolság csökken, az előbbi értékeken keresztül visszatér a 0-ba: $H(360°)=0$. Előjele a $0° < \alpha < 360°$ intervallumban pozitív. Mivel a $\frac{h}{r}$ hányadosban $r \neq 0$, ezért a függvény folytonos. A nevezetes szögek húrfüggvény-értékeit táblázatba foglaljuk, és a görbe egy ívdarabja ábrázolható.

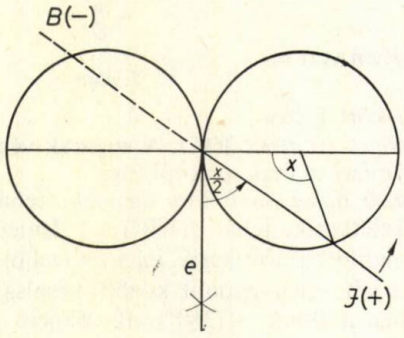
α	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$H(\alpha)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

HÚRFÜGGVÉNYTÁBLÁZAT

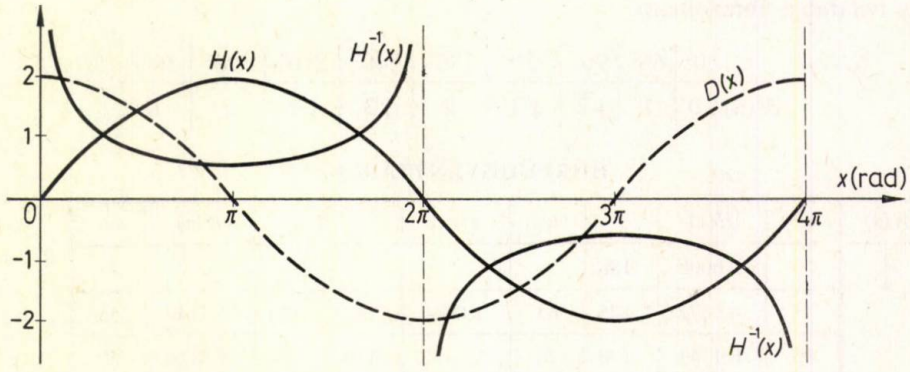
$H(\alpha)$ ↓	$\alpha°$	$H(\alpha)$	—	$\alpha°$	$H(\alpha)$	—	$\alpha°$	$H(\alpha)$	—	↑ $D(\alpha)$
	0	0,0000	180	—	—	—	—	—	—	
	5	0,0872	175	65	1,0746	115	125	1,7740	55	
	10	0,1743	170	70	1,1472	110	130	1,8126	50	
	15	0,2611	165	75	1,2175	105	135	1,8478	45	
	20	0,3473	160	80	1,2856	100	140	1,8794	40	
	25	0,4329	155	85	1,3512	95	145	1,9074	35	
	30	0,5176	150	90	1,4142	90	150	1,9319	30	
	35	0,6014	145	95	1,4746	85	155	1,9526	25	
	40	0,6840	140	100	1,5321	80	160	1,9696	20	
	45	0,7654	135	105	1,5867	75	165	1,9829	15	
	50	0,8452	130	110	1,6383	70	170	1,9924	10	
	55	0,9235	125	115	1,6868	65	175	1,9981	5	
	60	1,0000	120	120	1,7321	60	180	2,0000	0	
	—	$D(\alpha)$	$\alpha°$	—	$D(\alpha)$	$\alpha°$	—	$D(\alpha)$	$\alpha°$	$D(\alpha)$

Az ókor csillagászai a Ptolemaiosz előtti korban valószínűleg léptékes (nem euklidészi értelemben vett) szerkesztéssel kapták meg a szükséges közbülső értékeket, és a fedés miatt csak a $0° \leqq \alpha \leqq 180°$ intervallum $H(\alpha)$ adatait foglalták táblázatba.

A $H(x)$ függvényt két — egymást érintő — egységnyi sugarú kör rendszerében vehetjük fel általánosan. Ekkor a két kör közös érintőjéhez mérjük az $\frac{x}{2}$ radián kerületi szöget (a húrhoz tartozó középponti szög x rad). Míg az érintő újra érintési helyzetbe (π rad) fordul, addig a jobb oldali egységkör húrjához tartozó középponti szög változása 2π rad. A második félfordulat idején ugyanez történik a bal oldali körben. Ez utóbbihoz negatív $H(x)$ tartozik, ha a húr hosszának mértékszámát az érintőtől balra negatívnak tekintjük (2. ábra). Ezért tehát a $H(x)$ függvény periódusa 720°, azaz 4π radián. Maximuma: $H(\pi)=2$, minimuma: $H(3\pi)=-2$. Ezek alapján a függvény grafikonja:



2. ábra



3. ábra

A periódustulajdonság: $H(x)=H(x+k\cdot 4\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$.

A görbéről „ránézéssel" is megállapíthatjuk, hogy ez a $2\cdot\sin\frac{x}{2}$ grafikonja, vagyis: $H(x)\equiv 2\cdot\sin\frac{x}{2}$. Így találkozik az antik húrfüggvény és a „modern" trigonometria.

A $H(x)$ függvénynek nincs elsődleges kapcsolata a derékszögű háromszöggel. A húr és sugár — két mennyiség — itt, ebben a sorrendben csak egy hányados definiálását teszi lehetővé, tehát a cosinusos megfelelő elesik. Ha mégis erőltetjük a párhuzamot, akkor rajzoljunk két, egymást x rad szögben metsző átmérőt egy egységnyi sugarú körbe; és *a két párhuzamos húr távolságá*nak mértékszáma olyan $D(x)$ függvényt ad, amelyre teljesül a következő transzformációs kapcsolat (4. ábra).

$$D(x) = H(x+\pi),$$

vagyis fennáll a sinus-cosinus-párhuzam (3. ábra).

A négyzetes összefüggés itteni megfelelője (5. ábra):

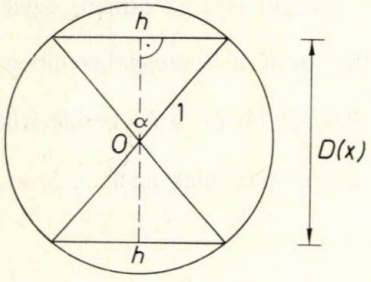
$$H^2(x)+D^2(x) = 4.$$

A két függvénynek a $D(x)=H(x+\pi)$ összefüggés miatt a húrfüggvényrendszerben is egy közös táblázata van, ebben $H(x)$ szigorúan monoton növekszik, $D(x)$ szigorúan monoton fogy, ha $0 \leqq x \leqq \pi$.

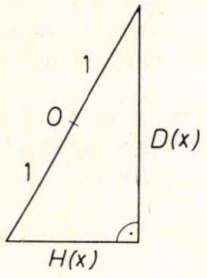
Értelmezzük a $T(x)$ függvényt, mint az x szögtartományba tartozó húrral párhuzamos érintőszakasz mértékszámát az egységnyi sugarú körben!

Ez lehetne a hegyesszög tangensének az előképe, „őse". Képezzük ugyanis a $H(x)$ és a $D(x)$ hányadosát; ekkor a mai trigonometria hányados-összefüggéséhez hasonlót kapunk (6. ábra):

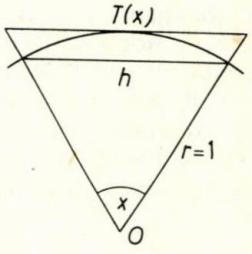
$$\frac{H(x)}{D(x)} = \frac{T(x)}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad D(x) \neq 0.$$



4. ábra



5. ábra



6. ábra

A különutas felépítés a hányados-összefüggéssel közvetlen kapcsolatba kerül a ma használatos rendszerrel. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a húrfüggvény — bizonyos nehézsége ellenére — elvileg egyenértékű a trigonometrikus függvénnyel. Könnyen bevezethetjük a reciprok és az inverz függvényeket is. Példa: $H^{-1}(x)=\frac{r}{h}$, $h \neq 0$. Míg a H és D függvény az egész számegyenesen értelmezett, a reciprokuk már nem. A H^{-1}-nek a páros π helyeken, a D^{-1}-nek a páratlan π helyeken nincs értelme, ezért a grafikonjuk megrajzolásához célszerű figyelembe vennünk az aszimptotákat (3. ábra).

Alkalmazások

A húrfüggvénynek nemcsak hátránya van — előnye is lehet. Jól látszik ez egy tipikusan csillagászati feladat megoldásakor.

F. 1. Fogyatkozáskor megállapították, hogy a Hold átmérője a Földének 0,27 része. Milyen távol van a Hold a Föld felszínétől?

Megoldás. A látszó átmérő a nagy távolság miatt közelítőleg húrnak tekinthető, amelyhez kerekítetten 32 ívperces látószög tartozik, ez mérhető. Mekkora a sugárként kezelhető távolság?

$$H(\alpha) = \frac{h}{r}; \quad r = \frac{h}{H} = \frac{0{,}27}{0{,}009} = 30 \quad \text{földátmérő} \quad [H(32') \approx 0{,}009]$$

$$r = 30 \cdot 6370 \cdot 2\,\text{km} \approx \underline{382\,000\,\text{km}}.$$

Ilyen előny több esetben is jelentkezik.

F. 2. Melyik nagyobb: 10 cm sugarú körben a 102°-os középponti szöghöz, vagy 40 cm sugarú körben a 22°-os középponti szöghöz tartozó húr?

Megoldás: $n=\frac{r_1 \cdot H(\alpha)}{r_2 \cdot H(\beta)}=\frac{10 \cdot H(102°)}{40 \cdot H(22°)}$; ez nagyobb mint 1, tehát az előbbi a nagyobb.

A következő — kidolgozatlan — feladatok megoldása is legalább egy művelettel rövidebb a megszokottnál:

F. 3. Valamely háromszög két szöge 32° és 51°, a köréje írható kör sugara 14 cm. Mekkorák az oldalak?

F. 4. Mekkora a 20 oldalú szabályos sokszög kerülete, ha a köréírható kör sugara 16 cm?

F. 5. Adott körben hányszorosára növekszik a húr, ha a hozzá tartozó középponti szöget 34°-ról megkétszerezzük?

F. 6. 10 cm sugarú félkörben mekkora szöget zár be egymással az átmérő egyik végpontjából kiinduló 12 cm-es és 16 cm-es húr?

F. 7. Adott körben hányszor nagyobb húr van a 100°-os kerületi szöggel szemben, mint a 10°-ossal szemben?

F. 8. Két kör közös húrja 6 cm, ez a k_1 kör kerületéről 11°-os, a k_2 kerületéről 42°-os szögben látszik. Mekkorák a sugarak?

F. 9. 10 cm sugarú körben mekkora középponti szögek tartoznak az 1, 2, 3, ..., 19 cm hosszú húrokhoz?

Összegezés

A húrfüggvény a matematika magasrendű eszköze volt az ókorban, főként a csillagászat fejlődését mozdította elő. A geocentrikus rendszer legfejlettebb formája topográfiai tekintetben felülmúlta a kopernikuszit. Mégis a heliocentrikus rendszer nagyobb távlatokat nyitott, fejlettebb volt, ezért kiszorította az elődeit. Hasonlóan: a derékszögű háromszög trigonometriája fejlettebb, hajlékonyabb, egyszerűbb — néhány száz év alatt felváltotta, ill. bekebelezte az elődöt.

A húr függvénykapcsolatai a fentiektől eltérő módon is bevezethetők, de akkor nehezebben látszik a régebbi és az újabb közötti rokonság, a definíció fejlődése. Az ókor nyilván a fentiekben bemutatott utat választotta.

A mellékelt húrfüggvénytáblázat helyszűke miatt 5°-os lépésekkel készült, de a szokásos módon lehet interpolálni.

DR. KÁRTESZI FERENC
ny. egyetemi tanár
Budapest

Egy kombinatorikus geometriai feladat

SYLVESTER 1893-ban a következő kérdést közölte: Igaz-e az a tétel, hogy *ha az euklideszi sík n pontja nem egy egyenesen helyezkedik el, akkor van olyan egyenes, amely a mondott n pont közül éppen csak kettőt tartalmaz?* Először GALLAI T. bizonyította be, hogy igaz ez a tétel (1933-ban). COXETER 1961-ben bebizonyította, hogy ez a tétel az olyan síkon is igaz, amelyre nézve csak azt kötjük ki, hogy kielégíti az illeszkedési és rendezési axiómákat.

A jelen közleményben síkon olyan síkot értünk, amely az illeszkedési és rendezési axiómák mellett még a PAPPOSZ—PASCAL-axiómának is eleget tesz. A GALLAI—SYLVESTER-tétel egy alkalmazását mutatjuk be a következő, könnyűnek látszó, de

nehéz feladat megoldásában. A feladat: be kell bizonyítani, hogy *nincs a síknak 9 pontból és 11 egyenesből álló olyan Σ alakzata, hogy ezeknek az egyeneseknek mindegyike éppen hármat tartalmaz a mondott 9 pont közül.*

1. Geometriai feladatunk megoldása előtt egy — talán — önmagában is érdekes kombinatorikus feladattal foglalkozunk.

A 9 elemű Γ halmaz elemeinek neveként számokat használunk: $\Gamma=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. E halmaznak $\binom{9}{3}=84$ háromelemű részhalmazából kiválasztunk olyan 11 példányt, hogy a Γ bármely két eleme a mondott 11 részhalmaz közül legfeljebb egyiknek legyen elempárja. Az így kiválasztott 11 részhalmazt jelölje $1', 2', \ldots, 11'$.

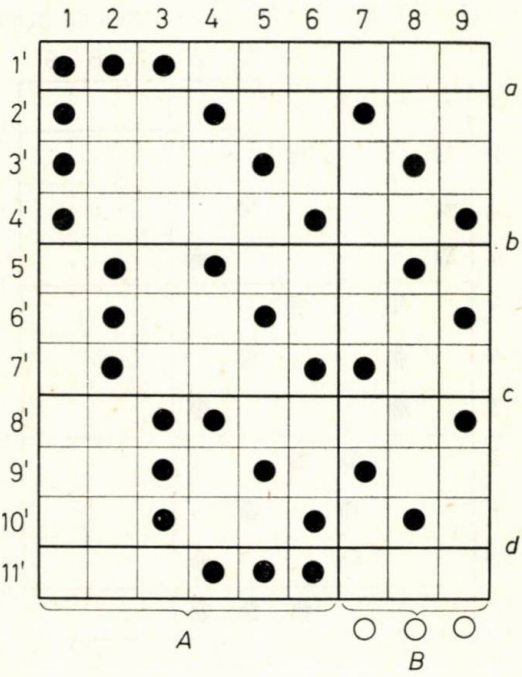
Az így megfogalmazott feladat megoldható, amint azt az 1. ábrán bemutatott θ *jeltábla* tanúsítja. A tábla értelme a következő: oszlopai a Γ halmaz elemeit, sorai a szóban forgó részhalmazokat, az i' indexű sor és k indexű oszlop kereszteződési mezejébe — az (i, k)-val jelölt mezőbe — írt ● jel pedig azt jelenti, hogy $k\in i'$.

A részhalmazai által szervezett Γ halmazt képviselő θ jeltábla jellemző tulajdonságai a következők:

1. *A tábla 11 sorból és 9 oszlopból áll.*

2. *Minden sor három,* ● *jellel ellátott mezőt tartalmaz.*

3. *Bármely két oszlopot legfeljebb egy sor keresztez jellel ellátott mezőkben.*



1. ábra

A tábla minden más tulajdonsága levezethető ebből a háromból. Így például a tábla formáját jellemző következő tulajdonság:

4. *A θ tábla nem tartalmaz tilos jelnégyest.* Tilos jelnégyes az olyan négy ● jel, amelyek két sor és két oszlop négy kereszteződési mezejét töltik meg.

Ha ugyanis volna tilos jelnégyes, az a 3-nak ellentmondana.

5. *A tábla bármelyik oszlopában legfeljebb négy* ● *jel van.*

Ha ugyanis — mondjuk — az m indexű oszlopban k számú ● jel van, akkor az őket tartalmazó k számú sor mindegyikében még további két-két ● jelnek kell lennie. Az így számba vett $2k$ számú további jel, az m indexű oszlop jeleire és a 4-re való tekintettel, egyenként más-más oszlopban van. Eddig összesen $1+2k$ számú oszlopot vettünk tekintetbe. Nyilvánvalóan $1+2k\leqq 9$, amiből valóban $k\leqq 4$.

6. *Legalább hat négyjelű oszlop van.*

Ha ugyanis a k számú jelet tartalmazó oszlopok száma x_k, akkor

$$x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=9. \tag{1}$$

Soronként számlálva a jeleket azt találjuk, hogy $11\cdot 3=33$ jel van. Oszloponként

számlálva tehát az adódik, hogy

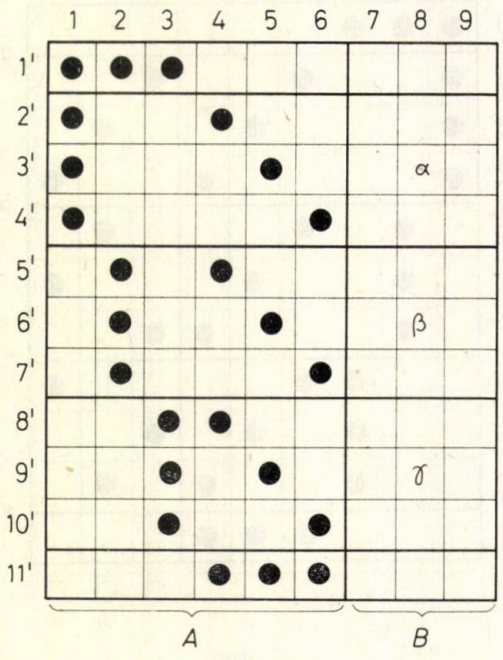
$$0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 33. \tag{2}$$

Ebből az előbbinek háromszorosát kivonva $-3 \cdot x_0 - 2 \cdot x_1 - x_2 + x_4 = 6$, vagyis

$$x_4 = 6 + 3x_0 + 2x_1 + x_2 \tag{3}$$

adódik. Valóban $x_4 \geqq 6$.

A továbbiakban egy 11 sorú, 9 oszlopú *űrlapot* használunk, s abba fokozatosan átmásoljuk a θ tábla jeleit. Előbb azonban egy hatoszlopú A és egy háromoszlopú B részre bontjuk a táblát. Az oszlopokat ugyanis úgy permutálhatjuk, hogy az A rész minden oszlopa 4 jelet tartalmazzon. Ezután nem lehetséges, hogy minden sor A-beli szakasza csak legfeljebb 2 jelet tartalmazzon, mert akkor az A-ban összesen csak legfeljebb $11 \cdot 2 = 22$ jel volna. Márpedig oszloponként számlálva az A-ban $6 \cdot 4 = 24$ jelnek kell lennie, és $22 \neq 24$. Egy, az A-ban 3 jelet tartalmazó sort a sorok, valamint az oszlopok alkalmas permutációjával olyan helyzetbe hozhatunk, mint ami a 2. ábrán látható.



2. ábra

A sorok permutálása vagy az oszlopok permutálása nem bontja meg a θ táblát jellemző 1., 2., 3. tulajdonságok érvényességét. A θ-ból ilyen permutációkkal származtatott θ' tábla ugyanazt a szerkezetet fejezi ki, mint az eredeti θ tábla; azt mondjuk, hogy a kettő *izomorf* egymással.

Be fogjuk bizonyítani a következő tételt. (Bár hosszadalmas, de egyszerű bizonyítást adunk.)

I. *Az 1., 2., 3. tulajdonságok izomorfizmus erejéig meghatározzák a θ jeltáblát.*

Az 1. ábrát fokozatosan permutálva átmásoljuk a 2. ábra űrlapjára. Az átmásolás első fázisa olyan permutációkból áll, amely az első sort és első oszlopot a 2. ábrán látható formára hozza. Az első fázis után az a és b vonal között a második és harmadik oszlop üres, mert különben tilos jelnégyes keletkezne.

Második fázisként a sorokat úgy permutáljuk, hogy a második oszlop további három jele a b és c vonal között legyen. Most a harmadik oszlop a és c vonal közti szakaszának kell üresen maradnia, nehogy tilos jelnégyes keletkezzék.

Harmadik fázisként a c alatti sorokat permutáljuk úgy, hogy a harmadik oszlop további három jele a c és d között legyen.

Minthogy most már a negyedik, ötödik, hatodik oszlopban az a-tól b-ig, b-től c-ig, c-től d-ig csak egy-egy ● jel lehet, ezekből a tábla utolsó sorának (a 11′-nek) szerkezete egyértelműen adódik. Vagyis a negyedik, ötödik, hatodik oszlop negyedik jele a 11′ indexű sor 4, 5, 6 indexű mezőibe írandó; ez a negyedik fázis.

Az a és b, b és c, c és d közötti sorok permutálásával elérhető az A résznek a 2. ábrán szereplő jelalakzata. Ez a táblarendezés ötödik fázisa.

Az ötödik fázis után a 7, 8, 9 indexű oszlopok mindegyike még három-három ● jelet tartalmaz. Az utolsó három oszlop permutálásával vagy az 1. ábrát kapjuk, vagy olyant, amelyben az 1. ábra β és γ parcellája fel van cserélve. Az utóbbi jelkép azonban az 1. ábrából az

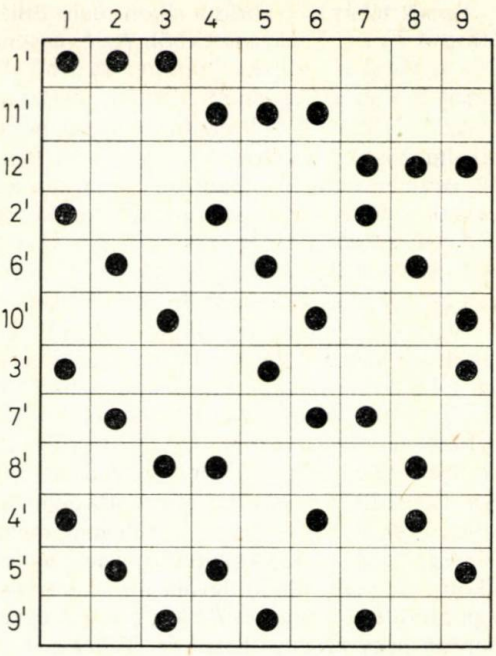
$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

oszloppermutációval és a

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1'2'3'4'5'6'7'8'9'10'11' \\ 1'2'3'4'8'9'10'5'6'7'11' \end{pmatrix}$$

sorpermutációval származtatható. Ezzel az I. tétel bizonyítását be is fejeztük.

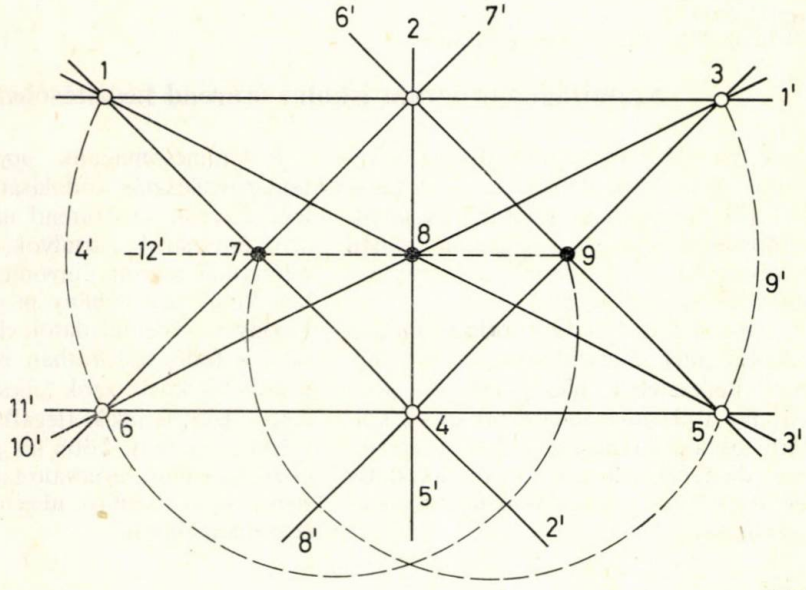
Vegyük észre, hogy jeltáblánk úgy bővíthető egy új sorral, a 12′-vel, hogy annak az utolsó három mezejében legyen a három ● jel! Ezt a 12 sorú ábrát a 3. ábrává lehet permutálni. A 2., 3. tulajdonság ezen az új jeltáblán is igaz marad.



3. ábra

2. Most visszatérünk geometriai feladatunkra. Ha volna olyan Σ alakzat, amely 11 egyenesből és 9 pontból áll és az 1., 2., 3. tulajdonsággal rendelkezik, akkor azt egy θ *illeszkedési táblával* jellemezhetnénk. A tábla sorai a Σ egyeneseit, oszlopai a pontjait képviselnék, továbbá a j' indexű sor és a k indexű oszlop kereszteződési mezejében levő ● jel azt jelentené, hogy a k nevű pont a j' nevű egyenesen van.

Ez az illeszkedési tábla egy sorral bővíthető és a 4. ábrává permutálható.



4. ábra

Tessék tehát a 3. ábrát a síkon realizálni! Kiindulunk a 8 nevű pontból és a rajta átmenő 3′, 10′, 5′ egyenesekből. Az 5′ egyenes 8-tól különböző két pontja legyen a 2 és 4. Mind a 2, mind a 4 ponton átmenő olyan 1′, illetve 11′ egyenest választunk, amely a 3′ és 10′ egyenest egyaránt metszi az 1 és 3, illetve az 5, 6 pontban.

Az 1, 2, 3 és a 4, 5, 6 egyenes vonalú ponthármasok miatt az 1 4 3 6 2 5 hatszögre alkalmazható a PAPPOSZ—PASCAL-tétel. Eszerint a 7, 8, 9 pontok egy egyenesen — a 12′ nevű egyenesen — vannak. Ezt ugyan a 3. ábra (látszólag) nem követeli meg, de következménye azoknak, amiket megkövetel. — A bővíthetésre gondoljunk! —

Az illeszkedési tábla szerint a $4' = \{1; 6; 9\}$ és a $9' = \{3; 5; 7\}$ ponthármas is egyenes vonalú kellene, hogy legyen. Ábránkon azonban nem az. — Talán ügyetlenül válogattuk a táblát realizáló térelemeket? —

Tegyük fel, hogy ábránkon a $4' = \{1; 6; 9\}$ is egyenes vonalú ponthármas, és tekintsük még az $5' = \{2; 4; 8\}$ egyenes vonalú ponthármast! Ezek biztosítják, hogy az 1 4 9 2 6 8 hatszögre is alkalmazható a PAPPOSZ—PASCAL-tétel, és aszerint a $9' = \{7; 3; 5\}$-nek is egyenes vonalú ponthármasnak kell lennie.

Ezért azonban a realizáló geometriai alakzat 12 egyenesből áll, és a 9 pont bármelyik ketteje a 12 egyenes egyikén van. Más szóval a Σ két pontját összekötő egyenes még egy harmadik pontot is tartalmaz. Ez azonban a GALLAI—SYLVESTER-tétel szerint lehetetlen. Tehát igaz a bevezetésben már megfogalmazott II. tétel.

Megjegyzés: A tájékozottabb olvasó nyilván észreveszi, hogy a 4. ábra a rendezett síkon nem realizálható ugyan, de a harmadrendű affin GALOIS-síkon igen. Ez ugyanis 9 pontból és 12 egyenesből áll; minden egyenese három pontot tartalmaz, és minden ponton négy egyenes halad át. Tehát a 4. ábra ennek a GALOIS-síknak illeszkedési táblájaként is felfogható.

IRODALOM

[1] H. S. M. COXETER: *A geometriák alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973. (L. a 79., 80. és 189., 190. oldalt!)

[2] KÁRTESZI F.: *Bevezetés a véges geometriákba.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

SUGÁR GYÖRGY
vezető tanár
ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskolája

Számítógép-program iskolai órarend készítéséhez

Az iskolai órarend összeállítása a legtöbb iskolában matematikaszakos tanárok szünidei feladata. Ez a munka az ötnapos tanítási hét és a gimnáziumokban a fakultatív oktatási rend bevezetésével jócskán megnehezedett.

A Radnóti Miklós Gyakorló Iskolában az órarendek elkészítéséhez az 1981/82-ben kifejlesztett programcsomagot használjuk. A programok elsősorban a fakultatív oktatási rendszer számára készültek, de természetesen a nem fakultatív oktatású iskolák is korlátok nélkül alkalmazhatják.

Programcsomagunk gondoskodik a tantárgyfelosztás kódolásáról, a kód ellenőrzéséről, az órarend megszerkesztéséről és tanárok, osztályok, valamint előadótermek szerinti kinyomtatásáról. Ezeken kívül még néhány program készült bizonyos mellékfeladatok ellátására. Például a több változatban is elkészíthető órarendek közül azok teljes összeállítása előtt választhatjuk ki a legalkalmasabbnak ígérkező verziót. Több kis program dolgozik az együtt bifurkáló tanárok szabad idejének és tanítási idejének optimális összehangolásán.

Az adatbázisban egyszerű módon meg lehet adni előre rögzített időpontú tanítási órákat akár egyetlen, akár néhány meghatározott osztály, akár egész évfolyam számára, akárhány tanárral. Ez az ún. fakultatív „sávok" legegyszerűbb elhelyezési módja. De ha a bifurkáló tanárok száma kisebb 5-nél, a program automatikusan képes ilyen órák elhelyezésére. Előre le lehet tiltani egyes tanárok számára akár egész napokat, akár bizonyos órákat (például amikor más elfoglaltságuk van). Azoknak a tanároknak számára, akik ezt nem veszik igénybe, a programok automatikusan váltakozva biztosítanak olyan napokat, amikor később kezdenek és olyanokat, amikor korábban végeznek.

Maga az órarendszerkesztő-program szakaszosan is működtethető. Ilyenkor bizonyos (előre meghatározható) számú olyan tanóra esetén, amelyet a gép nem tud elhelyezni valamennyi rendelkezésre álló időpont átvizsgálása és az összes szóba jöhető, egyszeres mélységű óracsere megkísérlése után sem, a program működése félbeszakad. Az ilyen „makacs" órákat kézi úton (pl. többszörös mélységű cserék révén) kell elhelyezni. Ezután a kézi változtatásokat egy újabb program hozzászerkeszti az adathalmazhoz, majd folytatódik az órarendkészítés.

Kézzel elhelyezendő óra osztályonként átlagosan 1,8 szokott adódni. A programcsomaggal mintegy 94—95%-os teljességű órarendeket szoktunk készíteni. Minden olyan iskola számára alkalmas, ahol 99-nél nem több tanár, legfeljebb 10 évfolyam és 30—40 osztály számára kell ötnapos órarendet készíteni.

A kifejlesztés és a futtatás az ELTE Számítóközpont R—10-es kisszámítógépén történt. Ennél kisebb kapacitású gépek — pl. ABC—80 — nem bizonyultak alkalmasnak órarendkészítésre.

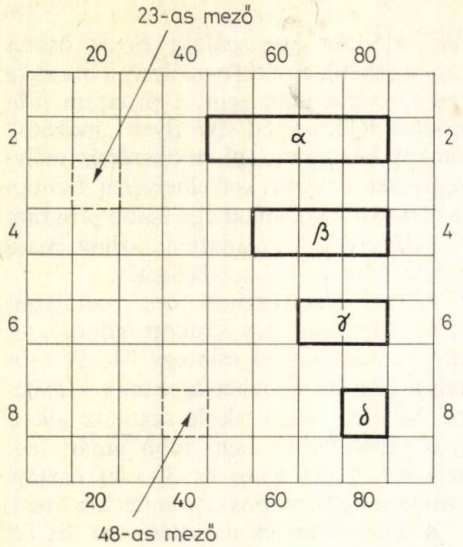
HENNYEY JUDIT
általános iskolai tanár
Budapest

SMYOZ — Egy logikai játék I.

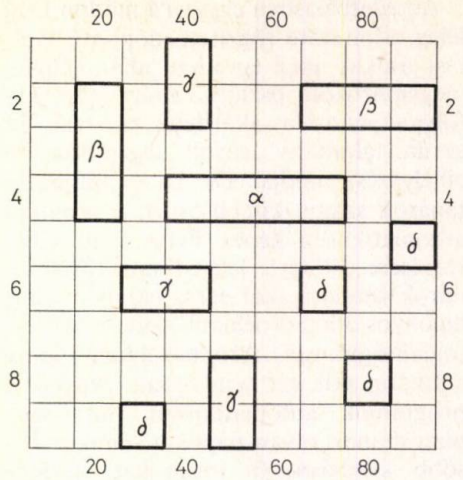
1. Bevezetés

A logikai játékok között jelentős helyet foglalnak el a rejtvényjátékok, amelyeknek lényege: bizonyos adatok alapján valamilyen elrendezést *rekonstruálni, megfejteni.* Ezeknek az is közös sajátsága, hogy — papíron és ceruzán kívül — semmilyen eszközt nem igényelnek. Ide tartozik az alábbiakban ismertetendő SMYOZ is, amelynek őse a jól ismert — de logikai játéknak még alig nevezhető — „tengeri csata", vagy más néven TORPEDÓ játék. Ez abból áll, hogy mindkét játékos kockás papírra felrajzolja a meghatározott számú és alakú hajóból álló „flottáját", amit az ellenfélnek lövésekkel el kell találnia. Az nyer, aki az ellenfél teljes flottáját előbb süllyeszti el.

A torpedójáték táblája és az elhelyezendő hajók alakja, valamint száma nem alakult ki olyan határozott formában, mint például a sakknál a 8×8-as tábla és a jól ismert sakkfigurák. Az egyik torpedó-variáns, amelyből a smyoz származott, 9×9-es táblán helyezte el négyféle hajóját. A legnagyobb hajó négy mezőből álló téglalap volt: ezt nevezzük a jövőben ALFÁNAK. Hasonlóképpen a három-, két- és egymezős hajó legyen sorrendben: BÉTA, GAMMA és DELTA. Az 1. ábrán látható táblán mindegyik hajóból egyet-egyet helyeztünk el. A teljes flotta tíz hajóból áll, s a játék azzal kezdődik, hogy ezt a tíz hajót — 1 alfát, 2 bétát, 3 gammát és 4 deltát — mindkét játékos felrajzolja a saját, rejtett 9×9-es táblájára. Ezután kezdődik a lövöldözés, ami annyit jelent, hogy felváltva bemondják egymásnak a megcélzott mező (vagy mezők) kétjegyű sorszámát. Bemondják egymásnak a találatot, ami vagy hajó, vagy víz. Hajó esetén be kell mondani, hogy a találat



1. ábra



2. ábra

melyik hajót érte és hányadszor: béta először, gamma másodszor stb.

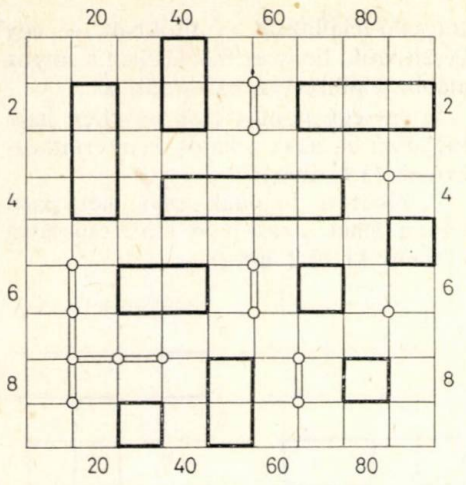
A tíz hajó egy lehetséges elhelyezését a 2. ábrán találjuk. Így a 81 mezőből 20 hajómezővé, 61 pedig vízmezővé válik. Egy vaktában leadott lövés találati valószínűsége kereken 25%, ami lényegesen javul akkor, ha egy már eltalált hajó többi mezejét keressük. Ilyen esetben a lövés elhelyezésében már van némi logika, de ez nem változtat azon, hogy a torpedó lényegében szerencsejáték. Első pillanatra talán meglepő, hogy a torpedóból ennek ellenére magas szintű logikai játék fejleszthető: ez a smyoz. A szerencseelem természetesen megmarad, de csak annyi, amennyi a játékot színessé teszi.

2. Játékszabályok

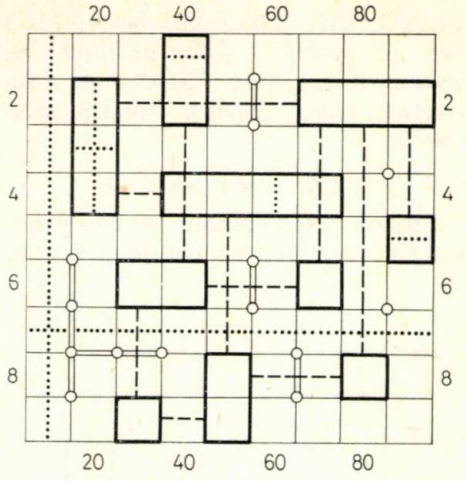
A torpedó fejlesztésének alapgondolata az, hogy növelni kell a mezőkről adandó információ tartalmát. Ezt a smyozban úgy valósítjuk meg, hogy a mezőkön kívül a mezőket határoló vonalak keresztezési pontjainak is jelentőséget tulajdonítunk. E pontokat először is két csoportba osztjuk: van 64 belső pont és 36 külső, a tábla kerületén elhelyezkedő pont. Ha elkészítettük a felállítást, a pontok tovább osztódnak: lesznek hajók által elfoglalt HAJÓPONTOK, és elfoglalatlan VÍZPONTOK. Ennek definícióját kissé élesíteni kell: VÍZPONTNAK csak a hajó által el nem foglalt *belső pontot* nevezzük (a rajzokon üres körrel jelöljük). (Hajópont viszont belső és kerületi pont egyaránt lehet!)

Az első gondolat, ami a mezőkről adott információt gazdagítja, a „víztalálatról" adandó információ. A puszta „víz" bejelentés a hajókra nem mond semmit. Ha viszont tekintetbe vesszük, hogy a vízmező négy sarkán milyen pontok vannak, akkor máris többféle vízmezőről beszélhetünk: van NULLÁS, EGYES, KETTES, HÁRMAS és NÉGYES VÍZ aszerint, hogy a vízmező négy sarkán hány vízpont van. Így egy körülbelüli egyensúly alakul ki a víz- és hajótalálat információtartalma között. A 3. ábrán kiegészítettük a 2. ábra torpedó-felállítását vízpontokkal, amelyeket még összefüggő „vízpont-láncokba" (kettős vonalakkal) is összekapcsoltunk. (Ezeket fogjuk SZIGETNEK nevezni.) Pár példa: a 33-as mező→nullás víz, a 15-ös→egyes, a 27-es→hármas víz, a 67-es→kettes; és így tovább.

A mezőkről adandó információk további gazdagítását a színek bevezetésé-



3. ábra



4. ábra

vel érjük el. A 3. ábrán látható felállítást „színezzük ki" a következő szabályok szerint: húzzunk minden sorban és oszlopban bizonyos hosszúságú színes vonalat aszerint, hogy a kérdéses „sávon" hány hajó (nem hajómező!) van! Ha a sorban (illetve oszlopban) nincs hajó, akkor a vízben — parttól partig — *zöld vonalat* húzunk. Ha a sorban egyetlen hajó van, akkor a zöld vonalat a hajó belsejében húzzuk. Ha pedig több hajó van a sorban, akkor a két szélső hajót *piros vonallal* kötjük össze, amely az esetleg közrefogott harmadik hajón áthalad. (Csak így keletkezhet piros hajómező.)*

A fenti szabályok szerint kiszínezett felállításunkat a 4. ábrán mutatjuk. A színezés következtében tehát a mezőkről adandó információ tovább gazdagodik: azonkívül, hogy a találat hajó (alfa, béta, gamma, delta) vagy víz (0-ás, 1-es, 2-es, 3-as, 4-es); a találatnak színe is van, mégpedig fehér, piros, zöld, dupla-piros, piros-zöld vagy dupla-zöld. Pár példa a 4. ábrából: 14=zöld 0-ás, 17=dupla-zöld 2-es, 22=zöld béta, 26=fehér 2-es, 44=piros alfa stb.

A smyozban a játék célja — a torpedóhoz képest — értelemszerűen módosul. Az ellenfél flottájának elsüllyesztése helyett — *annak földerítése a feladat.* Az nyer, aki a földerítést kevesebb információ alapján fejezi be, pontosabban: kevesebb „lövést", azaz információ-kérést használ fel. Ahhoz, hogy egy felállítás kevés információ alapján földeríthető legyen, a mező-információ gazdagításán kívül még a hajók elhelyezésének „nehezítésével" is hozzájárulnak a smyoz szabályai. A 2. ábrán bemutatott torpedófelállítást — hallgatólag — úgy készítettük el, hogy az a most ismertetendő elhelyezési szabályoknak megfeleljen. E szabályok ismertetése előtt tisztáznunk kell néhány „szakkifejezést" a hajókkal kapcsolatban.

A smyoz-tábla kerületét tekintsük „partnak" és vezessük be a következő szóhasználatot: ha egy hajó parti pontot is foglal, nevezzük azt KIKÖTÖTT HAJÓNAK; ha pedig csak belső pontot foglal, ÚSZÓNAK! A hajót képviselő téglalap oldalait különböztessük meg a következő megállapodással: a smyozban

* A színek használata ebben a játékban nagyon fontos. Technikai okok miatt színt nem használhatunk lapunkban, ezért kérjük Kedves Olvasóinkat, hogy az ábrákon a pontozott vonalakat zölddel, a szaggatott vonalakat pirossal húzzák át. Ilyen, feltétlen színezést kívánó ábra: 4., 7.2., 7.3., 7.4., 7.5., 7.6., 7.7., 7.8., 7.9., 8.3., 8.4., 8.5., 8.6., 8.7., 8.8., 9.2., 9.3., 9.4., 9.5., 9.6., 9.7., 9.8., 9.9. *(Szerkesztő)*

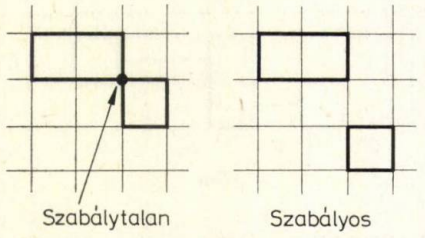
OLDALNAK csak a hajó hosszú (2, 3 vagy 4 egységnyi) szélét tekintjük; az egységnyi szél neve CSÚCS. A delta kivételes hajó, melynek minden széle CSÚCS.

3. Elhelyezési szabályok

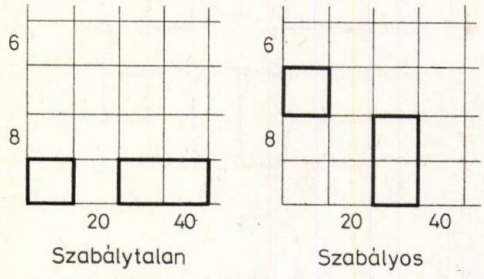
Térjünk vissza ezután az elhelyezési szabályokra! Mint említettük, a 2. ábra torpedó-felállítását — titokban — úgy készítettük, hogy az megfeleljen a smyoz alábbi felállítási szabályainak is:

1. egy-egy pontot csak egyetlen hajó foglalhat el, azaz a hajók nem érintkezhetnek (5.1. ábra);

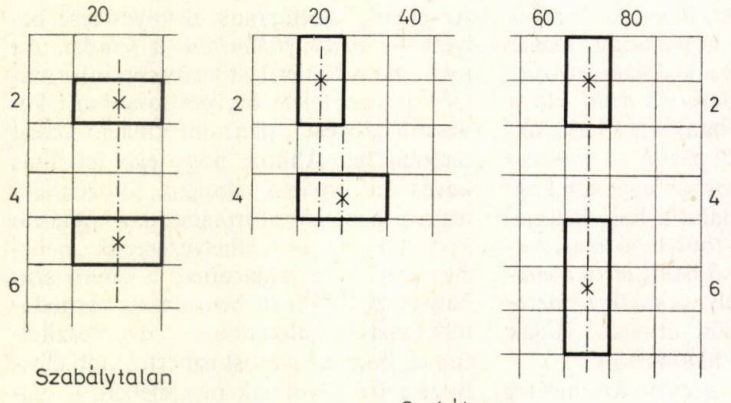
2. kikötött hajónak csak két parti pontja lehet, azaz hajó csak csúcsával köthető ki (5.2. ábra);



5.1. ábra



5.2. ábra



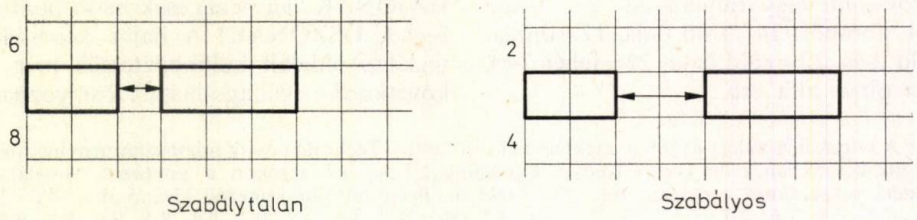
5.3. ábra

3. azonos típusú hajók geometriai középpontja nem eshet egy vonalba sem vízszintesen, sem függőlegesen (centrumszabály) (5.3. ábra);

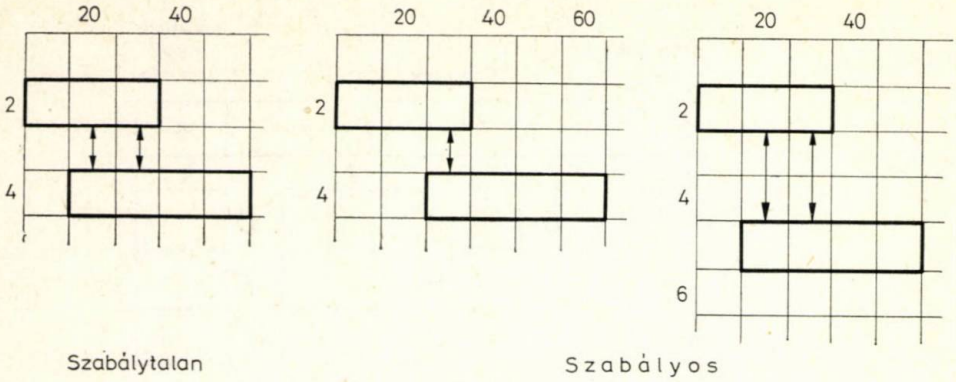
4. két hajó szemben levő csúcsa nem kerülhet olyan közel, hogy egyetlen vízmezőt fogjanak közre (5.4. ábra);

5. párhuzamosan álló, közvetlen közelben levő hajók oldalai csak egyetlen vízmezőt foghatnak közre (5.5 ábra).

Az utóbbi két szabály, a csúcsszabály és oldalszabály tömören így fogalmaz-



5.4. ábra

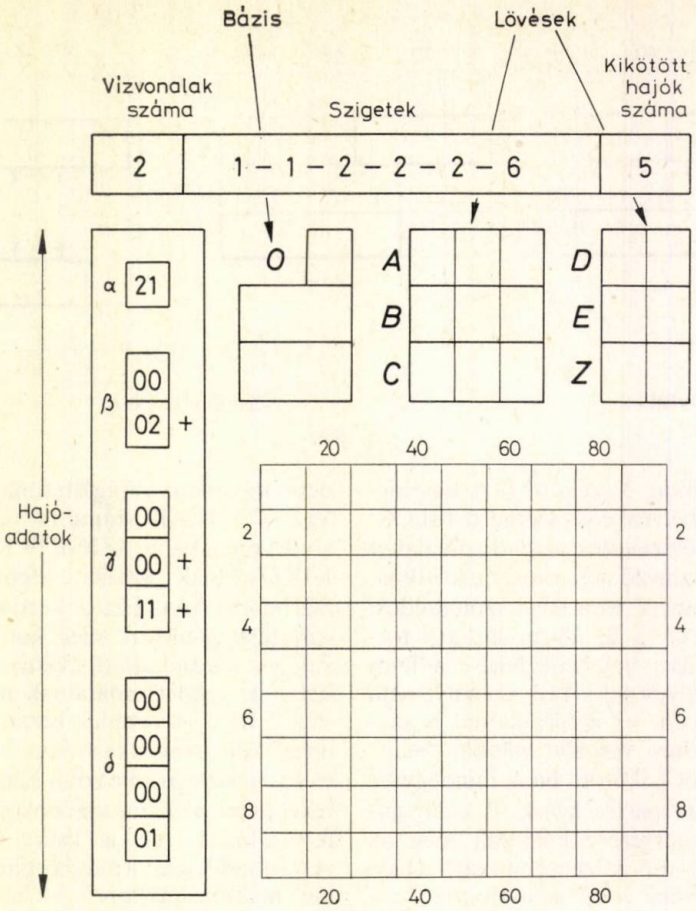


5.5. ábra

ható: csúcsokat összekötő (két hajómező között elhelyezkedő) vízmező TILOS; csúcs-oldal összekötés szabad; oldalakat összekötő vízmező nem tilos, de kritikus: két ilyen vízmező nem lehet szomszédos.

Ellenőrizzük a 2. ábrán látható torpedó-felállítást, hogy megfelel-e a fenti smyoz-szabályoknak! Az 1. szabályt nem kell ellenőrizni: ez a torpedónál is szabály. A kikötési szabályt valóban betartottuk: az öt kikötött hajó mindegyike csúcsával van partra kötve. A centrumszabály ellenőrzésére keressük meg az egy vonalba eső középpontokat! Ilyen csak kettő van: a 80-as oszlopban egy béta- és egy delta-centrum van, a 6-os sorban pedig egy gamma- és egy delta-centrum esik egy vonalba. Ezek egyike sem sérti a centrumszabályt, mert különböző hajókról van szó. A csúcsszabály ellenőrzésére keressünk „szembenéző" csúcsokat! Ilyent csak a 6-os sorban találunk, éppen az imént említett második párt. A gamma- és delta-csúcsokat viszont két vízmező választja szét, tehát megengedett ez az elhelyezés. Az oldalszabály ellenőrzésére keressünk olyan vízmezőket, amelyek két hajóoldalt kötnek össze! Ilyen a 32-es, 45-ös és 73-as mező, melyek a fentiek szerint megengedettek.

Ezt az ellenőrzést célszerű mindig végrehajtani, ha készen vagyunk az ellenfélnek készített felállítással. Ezután a játék úgy indul, hogy felállításunkról kezdeti adatokat szolgáltatunk. Ezek: a VÍZVONALAK száma (a vízen átmenő zöld vonalak), a SZIGETEK listája, a KIKÖTÉSEK száma, végül a hajók SZÍNLISTÁJA. Ezt a kezdeti adatszolgáltatást világítsuk meg konkrét példával: a 4. ábrán látható „kiszínezett" felállításunk kezdeti adatainak megállapításával! Itt a vízvonalak (azaz a vízen átmenő zöld vonalak) száma 2: a 7-es sor és 10-es oszlop színe zöld. Ezután a szigeteket (azaz a vízpont-láncok hosszát) kell felsorolnunk, ez a lista: 1-1-2-2-2-6. A harmadik adat a kikötött hajók száma, ami felállításunkban 5. (A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a kikötések száma nem független információ, mert a vízpontok összes számából így adódik: $k=v/2-2$.) Végül a hajószínek listáját kell elkészítenünk, minden hajóról egyenként meg kell adnunk a rajta átmenő színes vonalak számát és az alfára vonatkoztatott (párhuzamos vagy merőleges) állásukat. Az alfán két piros és egy zöld vonal megy át. Béták: a párhuzamos fehér, a merőleges dupla-zöld. Gammák: a párhuzamos fehér, a merőlegesek fehér és piros-zöld. Végül pedig a delták közül három fehér, egy zöld. A színek e listáját a következő megállapodással írhatjuk tömör formába: a színeket kétjegyű számmal jelöljük, melynek első jegye pirosat, a második zöldet jelent. A fenti listát tehát így írjuk: alfa 21, béták 00 és 02+, gammák 00, 00+ és 11+, delták



6. ábra

00, 00, 00 és 01. (A merőlegességet a színszám mellé írt + jelöli.) A kapott kezdeti adatok ellenőrzésére egyrészt a vízpontok és kikötések fenti összefüggése alkalmas, másrészt a vízvonalak és hajószínek közötti alábbi összefüggés. A hajókban található összes piros és zöld vonal száma legyen P és Z. Ezek ismeretében a vízvonalak száma így számítható:

$$V = \frac{P-Z}{2} + 3.$$

4. Smyoz-űrlap

A smyozt célszerű előre elkészített — vagy éppen nyomtatott — űrlapon játszani, melynek elrendezése a 6. ábrán látható, ahol felállításunk kezdeti adatait is beírtuk a megfelelő rubrikába. A játék kezdetekor ellenfelünk ennyit tud rejtett felállításunkról. Ebből természetesen nem lehet elindítani a földerítést: további adatokra van szükség.

A kezdeti adatok a felállítás megfejtéséhez elméletileg is elégtelenek, hiszen a felállítás kezdeti adatai változatlanok maradnak, ha valamelyik szimmetriatengelyre vonatkozó tükrözéssel új felállítást származtatunk.

További adatokat „lövésekkel", azaz mezők kijelölésével kérünk. A bemutatott smyoz-lapon hat lövéssorozat találati eredményeinek bejegyzésére van hely: ezek a hármas A, B és C, valamint a kettes D, E és Z sorozatok. Egy sorozatban több lövés van, aminek sorozat-

ként való kezelése annyit jelent, hogy a találati eredményeket nem egyenként kell megadni a lövések sorrendjében, hanem összesítve — például így: először bemondjuk a hajókat alfabetikus sorrendben, majd a vizeket nagyság szerint. Egy sorozat minden lövését nem kötelező leadni. Például az *A* sorozat 3 lövése közül csak 2-t adunk le, hogy megkönnyítsük annak eldöntését: melyik lövéshez melyik találat tartozik. Szélső esetként akár egyetlen *A*-t is leadhatunk, amikor a fenti kérdés föl sem merül. A lövésekkel hat sorozatban maximálisan 15 mezőre kérhetünk információt: az *A*, *B* és *C* sorozatokkal három-három mezőre, a *D*, *E* és *Z* sorozatokkal maximum két-két mezőre. (Tehát a hajók torpedójátékban megkívánt „elsüllyesztésére" a smyozban nincs is lehetőség — összesen 20 hajómező lévén.)

A lövések elhelyezésére a smyozban sincs túl sok logikai alapunk. Előfordulhat, hogy a lövések szerencsétlen elhelyezése miatt a logikai földerítést el sem tudjuk indítani. Ilyenkor jelent „mentőövet" a smyozban egy különleges „többlet-információ", a bázis-kérés. Erre a játék folyamán egyszer van lehetőség, és abból áll, hogy az egyik sorozat valamelyik lövését — akár a mező sorszámának megadásával, akár a találattal — kijelöljük és bázist kérünk rá. A bázis egy 3×3-as négyzet, mely 9 mezőt és 16 pontot foglal magába. A kijelölt mező ennek a bázisnak a középmezeje. A bázisról adandó információ lényegében ugyanaz, mint az egész 9×9-es négyzetről adott kezdeti adatok — csak kicsiben. Fel kell sorolni a bázisban levő hajókat: melyik hajónak hány mezeje van a bázisban és (bázison belül) milyen színes vonalak mennek át rajta; valamint fel kell sorolni, hogy melyik szigetnek hány vízpontja van a bázisban. A bázisinformációkat a smyoz-lapon az O jelű rubrikába jegyezzük föl.

5. A földerítés logikájáról

A kezdeti adatokból és a kért mezőadatokból a rejtett felállítás felderítése sajátos logikai feladat. Ennek logikai útja bizonyos szempontból a keresztrejtvény-fejtésre hasonlít. A földerítés során 81 mezőről kell eldönteni, hogy hajó- vagy vízmező. Ez egy 81 szemű logikai láncot jelent, melyben minden láncszem — azaz logikai döntés — függ az összes előzőtől. A logikai döntések atomja az „alternatíva", amikor két lehetőség közül kell választanunk. Az alternatíva nagyon sokféle lehet: egy kiszemelt mező vagy hajó, vagy víz; egy kiszemelt pontnak ugyanez az alternatívája; egy megadott színes vonal a kérdéses mezőn vagy vízszintes, vagy függőleges; és így tovább. A logikai láncban az alternatíva a legstabilabb láncszem: ha az egyik lehetőségről kiderítettük, hogy *lehetetlen,* máris rajzolhatjuk a másikat. A felállítás földerítése alternatívákon keresztül a leggyorsabb, de mindig gondolnunk kell arra, hogy egyetlen hibás szem az egész láncot tönkreteszi. Ez a tévesztési lehetőség még nagyobb, amikor nem alternatíváról, hanem több lehetőségről van szó; a sok lehetőség közül az egyik — esetleg rejtett — lehetőség felett könnyű elsiklani.

A megfejtés során egymás után eldöntött alternatívák eredményeit a smyozlapon föl kell tüntetnünk: például a vízmezőt sraffozással, a hajómezőt a hajókontúr részleges meghúzásával (hajókontúrt véglegesen csak hajómező melletti vízmező jelölhet ki!); hajópontot ·-tal, vízpontot ○-rel jelölhetjük meg. Így rajzolódik ki az eredetileg üres smyoztáblán — ha nem tévedünk, radír használata nélkül — az ellenfél teljes felállítása. Erről a sajátos folyamatról általánosságban nehéz lenne többet mondani: a következőkben bő példaanyaggal igyekszünk ezt illusztrálni.

DR. BERÉNYI ZSUZSANNA ÁGNES
középiskolai tanár
Budapest

Interkomputo '82

(Nemzetközi oktatási tapasztalatok cseréje és a Nemzetközi Eszperantista Matematikusok Egyesületének találkozója a Számítástudományi Tanácskozás keretében.)

1982. december 27-től 30-ig Budapesten, a SZÁMALK helyiségeiben a Neumann János Számítógéptudományi Társaság a Nemzetközi Számítástechnikai Szövetség támogatásával Nemzetközi Számítástechnikai Szimpóziont és Kiállítást rendezett.

Az elnök Vámos Tibor akadémikus volt. Az elnökségben foglalt helyet G. Cejtin, a leningrádi egyetem tanára; Helmar Frank, a Paderborn-i (NSZK) Kibernetikai-Pedagógiai Intézet igazgatója; a holland Jan O. de Kat kutatómérnök; Jerzy Leyk, a varsói egyetem tanára; François Lo Jacomo, a párizsi Matematikai Intézet munkatársa; Vladimir Nemec mérnök Csehszlovákiából; a svájci I. Uygur, a Nemzetközi Távközlési Unió titkára; valamint Szabó Flóra, az Egyetemes Eszperantó Szövetség titkára és Haszpra Ottó, a Budapesti Műszaki Egyetem tanára.

Már december 27-én megnyílt a számítástechnika legkorszerűbb alkalmazásait a gyakorlatban bemutató, változatos kiállítás. Különösen érdekes volt az oktatásban is felhasználható mikroszámítógépek sokasága. Az egyik személyi számítógépet az akkor megrendezett középiskolás számítástechnikai versenyen legjobban szereplő iskola kapta ajándékul. A verseny döntőjét december 28-án bonyolították le nagy érdeklődéstől kísérve, ugyancsak a SZÁMALK-ban, a Kalmár Lászlóról elnevezett előadóteremben.

A 102 előadás tíz szekcióban hangzott el. Ezek a részlegek párhuzamosan működtek. December 28-án, kedden délután került sor az oktatási tárgyú felolvasásokra. Elsőként a jugoszláviai Jozo Marević ismertette felméréseinek eredményét. Hangsúlyozottan helytelenítette az osztályozás-középpontú iskolai szemléletet. Azt állította, hogy az iskola a társadalom tükre, és ebből a tényből sok visszásság következik. Számadatokkal bizonyította, hogy a diákok az újszerű, míg a tanárok a régi típusú órákat kedvelik inkább. Ugyancsak a tanulók azok, akik helyeslik a számítógép alkalmazását a tanórákon — ellentétben a tanárokkal.

Németh József főiskolai hallgató szellemesen alkalmazza a számítógépet a területarányokra, a százalékszámításra vonatkozó feladatok szemléltetésére, a tanulók gondolkodásának fejlesztésére.

Izydor Podgórski lengyel pedagógiai főiskolai tanár a matematikatanítás lélektani kérdéseiről beszélt saját kutatásai alapján.

Mikes Gábor, a budapesti Hámán Kató Szakközépiskola számítástechnikatanára a hazánkban bevezetett középiskolai számítástechnikai képzés rendszerét ismertette.

Garádi János, a Magyar Posta mérnöke a középiskolások számára rendezett hazai számítástechnikai versenyekről számolt be.

Kovács Zoltán, a Budapesti Tanítóképző Főiskola tanára a négyzetszámok táblázatán mutatott be több érdekességet, amellyel színesíteni tudja a tanítást. Az első n négyzetszám összegére vonatkozó zárt formulát térben összeállítható famodellel szemléltette.

Az összejövetel nyelve — akárcsak a teljes INTERKOMPUTO-é — az eszperantó volt az 1983. esztendő, vagyis a

Kommunikációs Világév jegyében. Ez volt az első eset, hogy nemzetközi tudományos összejövetel az eszperantót választotta hivatalos nyelvnek. A rendezőség biztosította, hogy minden előadást lefordítsanak eszperantóra, és tolmácsolták is az elhangzottakat azok számára, akik nem tudtak eszperantóul. Az oktatási szekció baráti légkörét Helmut Rösslernek, a Speyeri (NSZK) Egyetem matematika módszertan tanárának elnöklése és Balogh Viktóriának, az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola docensének titkári tevékenysége biztosította.

Két évvel ezelőtt Budapesten találkoztak először a Nemzetközi Eszperantista Matematikusok Szervezetének (Internacia Asocio de Esperantistaj Matematikistoj, rövidítve: IAdEM) tagjai. Az INTERKOMPUTO '82 keretében külön szekcióban három napon át ismét üléseztek ennek a szervezetnek tagjai.

Az első napon François Lo Jacomo titkár ismertette az IAdEM tevékenységét. Többek között azt is bejelentette, hogy Budapesten Eszperantó Terminológiai Központ (Terminologia Sekcio, rövidítve: TeS) létesült mindenfajta szakterületre vonatkozóan, az ugyancsak fővárosunkban működő Eszperantó Tudományos és Kiadó Központ (Scienca kaj Eldona Centro, rövidítve: SEC) támogatására. A TeS első összejövetele Bad Saarowban (NDK) 1982 decemberében tisztázta azt, hogy a legfontosabb feladat a munkatársak összegyűjtése és a szakemberek részére megfelelő tanfolyamok szervezése. A továbbiakban a matematikai szakkifejezések eszperantó nyelvű változatairól folyt megbeszélés. Viták alakultak ki a sík- és térmértani szakkifejezések eszperantó változatairól. Javaslat készült a kombinatorikai és matematikai statisztikai szakkifejezések eszperantó elnevezésére. A megbeszélésen a hagyományos és a célszerű álláspont, illetőleg az európai nemzetközi szóhasználat és a sajátos, logikus eszperantó elnevezés hívei ütköztették érveiket.

A szünetekben kötetlen társalgásra is sor került. Többek között alkalmunk nyílt megismerkedni Gerard Cool svájci gimnáziumi tanárral, a nemrégiben megjelent Geometriai Értelmező Szótár egyik szerzőjével, aki először volt jelen az IAdEM tanácskozásán. Közölte azt a tervét, hogy példákat fog kidolgozni a szakkifejezések helyes alkalmazásának elősegítésére. Mauro La Torre római általános iskolai tanár kérésére 1981-ben elküldtem a magyar matematika-tanterv fordítását. Most elmondta, hogy Olaszország egyes tartományaiban a matematikát általános iskolában a természettudomány elnevezésű tantárgy keretében tanítják, együtt a kémiával, biológiával stb. Ez az első pillanatra talán tetszetősnek tűnő oktatási gyakorlat azonban sok gondot okoz a tanároknak. Az összejövetelen részt vevő olasz matematikatanárok egyébként elismeréssel nyilatkoztak a magyar általános iskolai matematika-tantervről. Az eszmecserékből például azt is megtudtuk, hogy Franciaországban a diákok egyáltalán nem tanulnak klasszikus elemi geometriát.

Az értékes, sokat nyújtó szakmai összejövetelt jól szervezett kirándulások, szórakoztató programok: színházi előadás, városnézés tették még változatosabbá. A nemzetközi találkozón alkalmi postahivatal is működött a rendezvényre utaló különleges bélyegzővel.

Voltak, akik már ismerősként látogatták meg újból a Szépművészeti Múzeumot, mások először gyönyörködtek Budapest panorámájában. A búcsú azonban csaknem egységes volt: Viszontlátásra Budapesten, 1983 augusztusában, az IAdEM következő találkozóján, az Egyetemes Eszperantó Kongresszus idején!

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
tanszékvezető főiskolai tanár
Budapest

Matematikus vándorgyűlés Szegeden

A Bolyai János Matematikai Társulat 1983. évi (sorrendben a 23.) Rátz László Vándorgyűlését július 5. és július 8. között tartotta meg Szegeden, közel 450 résztvevővel.

A plenáris ülést SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA akadémikus nyitotta meg, majd SZABÓ G. LÁSZLÓ, a Csongrád megyei Tanács elnöke köszöntötte a vándorgyűlés résztvevőit.

Az üdvözlő beszédek után DR. NEMETZ TIBOR, a *Beke Manó Emlékdíj* Bizottság titkára ismertette a Bizottság határozatát az 1983. évi Beke Manó Emlékdíjak odaítéléséről.

A Beke Manó Emlékdíj első fokozatában részesült
KŐVÁRY KÁROLY, a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium tanára.

A Beke Manó Emlékdíj második fokozatát kapta
MARTON KÁLMÁN, az esztergomi Dobó Katalin Gimnázium tanára,
NYÍRŐ LÁSZLÓ, a mezőkövesdi 3. sz. Általános Iskola tanára,
DR. PINTÉR LAJOSNÉ, a szegedi Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium szakvezető tanára,
SZERDAHELYI ANDORNÉ, a jakabszállási Általános Iskola tanítónője,
SZTANÓ TAMÁSNÉ, a budapesti Egressy Gábor Finommechanikai és Műszeripari Szakközépiskola igazgatóhelyettese.

A Beke Manó Emlékdíj plakettjét kapta
DR. WESZELY TIBOR, a marosvásárhelyi főiskola tanára.

A plenáris ülésen DR. SZENDREI JÁNOS *A matematikaoktatás helyzete közoktatásunkban* című előadását hallgathatták meg a vándorgyűlés résztvevői.

A következő napokban 4 szekcióban folytatta munkáját a vándorgyűlés. Az egyes szekciókban az alábbi előadások hangzottak el:

Alsó tagozatos szekció

Novák Lászlóné: Az általános iskolai matematikaoktatás helyzete (a Felső tagozatos és a Középiskolai szekcióval közösen).
Kovácsné Győri Ida: A témakörök összefüggésének érvényesítése az oktatási folyamatban.
Papp Józsefné Lengyel Magda: Műhelyforgácsok.
Reményi Gusztávné: Geometria az alsó tagozaton.
Forgó Pálné—Bozsó Józsefné—Korsós Imre—Haramiáné Kovács Mária: Műhelyforgácsok.
Nótin Lajos—Nótin Lajosné—Taricska Jánosné: A logika megalapozása az általános iskola alsó tagozatán.
Rósa Lászlóné: Szakfelügyelői tapasztalataim.

Felső tagozatos szekció

Erdős Pál: Bolyongásaim a matematika birodalmában (a Középiskolai szekcióval közösen).
Kapronczai Zoltánné: Felmérési tapasztalatok Pest megyében.

Czeglédi István: A felső tagozatba lépő tanulók matematikai képzettségének vizsgálata.
Dr. Rédling Elemér: Geometriai transzformációk [a Középiskolai (gimnáziumi) szekcióval közösen].
Masek Rudolfné: Egy matematikai kísérlet felmérésének tapasztalatai.
Szeredi Éva: Kutatások matematikaórákon I—II.
Tatár István: Önálló munkára nevelés módszere a gyakorlatban.
Dr. Iker János: A kombinatorikus gondolkodás fejlesztése a felső tagozaton.

Középiskolai szekció

Egyes előadások csak a gimnáziumi, mások csak a szakközépiskolai és szakmunkásképző alszekció közönsége előtt hangzottak el.

Dr. Böröczky Károly: Fejezetek a diszkrét geometriából.
Dr. Szilassi Lajos: A poliéderekről.
Hajnal Imre: Tanulságok a matematikatanítás múltjából (Amikről megfeledkeztünk...).
Dr. Kálmán Attila: A geometriatanulás pszichológiai szempontból.
Szalay István: Trigonometrikus polinomok szerepe a periodikus függvények megközelítésében.
Dr. Pintér Lajos: Néhány kedvenc problémám.
Bagics Lajos: A szakmunkásképzés helyzete, fejlesztésének feladatai.
Lukácsi Margit: Zsebszámológépek a szakmunkásképzésben.
Dr. Koller Lászlóné: Beszélgetés a szakmunkásképzés jelenlegi helyzetéről.
Radnainé Szendrei Julianna—Margittay Tihamér: A szakközépiskolai matematikaoktatás problémái és lehetőségei.
Dr. Horváth Jenő: Koordináta-geometria a középiskolában.
Klukovits Lajos: A számfogalom fejlődése.
Nagy Péter: Körszerű geodétikusok.
Páris György: Tájékoztató az iskolaszámítógép-programról.

Felsőoktatási szekció

Páris György—Dr. Fenyő István—Sima Dezső: Személyi számítógépek a matematikaoktatásban.
Sréter Istvánné—Bleyer András: Személyi számítógép-programrendszer használata a közönséges differenciálegyenletek oktatásában.
György Anna: Hagyományos matematikagyakorlatok és projekt vagy matematikalaboratórium?

Valamennyi szekció résztvevői számára a rendezők külön időt biztosítottak a hallottak megvitatására, továbbá beszélgetéseket szerveztek a matematikaoktatás helyzetéről, problémáiról, a matematika és a számítástechnika oktatásának kapcsolatáról, valamint ötletbörzét szerveztek az oktatásban hasznosítható ötletek, módszerek, tapasztalatok kicserélésére.

A szervező bizottság a résztvevők szórakozásáról is gondoskodott. Városnézésen vehettek részt, három kirándulás közül (Hódmezővásárhely, Kiskundorozsma — Ópusztaszer, Ópusztaszer — Fehértó) választhattak és egy jól sikerült, hangulatos közös vacsorát költhettek el a vándorgyűlés résztvevői.

Az időszerű, érdekes színes, és a további munkában értékesíthető előadások, viták, eszmecserék és beszélgetések ezt a vándorgyűlést is a matematikatanárok hasznos találkozójává avatták.

A jövő évi vándorgyűlés megrendezésére előreláthatólag Komáromban kerül sor.

FITOS LÁSZLÓ
főiskolai docens, Nyíregyháza
Bessenyei György Tanárképző Főiskola

Pitagoraszi számnégyesek és szám-n-esek

A pitagoraszi számhármasok, mint ismeretes, az

$$a^2+b^2=c^2$$

pitagoraszi összefüggés pozitív egész számokból álló megoldásai, és ezeket az

$$a=p^2-q^2, \quad b=2pq, \quad c=p^2+q^2 \quad (p>q;\ p, q\in\mathbf{N})$$

képletek szolgáltatják. Kontrollként meggyőződhetünk róla, hogy

$$(p^2-q^2)^2+(2pq)^2=(p^2+q^2)^2.$$

Meg kell itt még jegyeznünk, hogy

1. ha p és q relatív prím számok és a paritásuk különböző, akkor az a, b, c számok is relatív prímek lesznek;
2. ha a, b, c pitagoraszi számhármas, akkor na, nb, nc ($n\in\mathbf{N}$) is az. (L. pl. Veress Pál: Elemi mennyiségtan magasabb szempontból. Aritmetika. Bp. 1942., 129—132. oldal.)

Mivel azonban a Pitagorasz-tétel általánosítható, általánosíthatjuk a pitagoraszi számhármasok fogalmát is, és így beszélhetünk pitagoraszi számnégyesekről, számötösökről stb.

Eszerint a pitagoraszi számnégyesek olyan pozitív egész számokból álló számnégyesek, amelyek a Pitagorasz-tétel háromdimenziós általánosítását betűkkel kifejező

$$a^2+b^2+c^2=d^2 \tag{1}$$

összefüggést elégítik ki. Feladatunk olyan általános képletek levezetése, amelyek az összes pitagoraszi számnégyest előállítják.

Induljunk ki abból, hogy ha (1) mindkét oldalát d^2-tel osztjuk és $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$ helyébe rendre x-, y-, z-t helyettesítünk, akkor az origó középpontú, egységsugarú gömbfelület

$$x^2+y^2+z^2=1 \tag{2}$$

egyenletét kapjuk, vagyis az (1)-et kielégítő minden a, b, c, d számnégyesnek megfelel egy $\left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}; \frac{c}{d}\right)$ pont a (2) alatti gömb felületén. Ha tehát a, b, c, d pitagoraszi számnégyes, azaz csupa pozitív egész számból áll, akkor a neki megfelelő gömb-

felületi pont $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$ koordinátái pozitív racionális törtek. Ennek alapján a pitagoraszi számnégyesek meghatározását visszavezethetjük az egységsugarú gömbfelület pozitív, racionális koordinátájú pontjainak meghatározására.

Ezek a pontok a (2) alatti gömbfelület első térnyolcadban levő részén vannak, mert mind a három koordinátájuk pozitív. Vajon ki tudjuk-e metszeni őket a gömbfelületből olyan egyenesekkel, amelyek pl. a $P_0(-1; 0; 0)$ rögzített pontra illeszkednek? Kíséreljük meg!

Az ilyen egyenesek egyenletrendszere, ha irányvektoruk koordinátáit p-, q-, r-rel jelöljük,

$$\frac{x+1}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}. \tag{3}$$

Itt p, q, r értékét majd úgy fogjuk megválasztani, hogy a metszéspont az első térnyolcadban legyen.

A (3) egyenes és a (2) gömbfelület szóban forgó metszéspontjának meghatározása céljából meg kell oldanunk a (2) és (3) alatti egyenletekből álló egyenletrendszert. A (3)-ból kapott

$$x = \frac{pz}{r} - 1 \quad \text{és} \quad y = \frac{qz}{r} \tag{4}$$

kifejezéseket (2)-be helyettesítve, a

$$\frac{p^2z^2}{r^2} - \frac{2pz}{r} + \frac{q^2z^2}{r^2} + z^2 = 0 \tag{5}$$

egyenlet adódik. Ennek $z=0$ gyökét rögtön mellőzhetjük, hiszen az a (3) egyenes rögzített P_0 pontjának koordinátája. Az (5) egyenlet másik gyöke

$$z = \frac{2pr}{p^2+q^2+r^2}, \tag{6}$$

és ennek felhasználásával (4)-ből

$$x = \frac{p^2-q^2-r^2}{p^2+q^2+r^2}, \quad y = \frac{2pq}{p^2+q^2+r^2}. \tag{7}$$

Ezzel megkaptuk a metszéspont koordinátáit. De ez csak akkor esik az első térnyolcadba, ha p, q, r egyenlő előjelűek és $p^2>q^2+r^2$.

Végül visszahelyettesítve x, y, z helyébe az $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$ törteket, a, b, c, d-re az

$$a = p^2-q^2-r^2, \quad b = 2pq, \quad c = 2pr, \quad d = p^2+q^2+r^2$$

képleteket kapjuk. Ha itt p, q, r egymástól függetlenül úgy futja be a pozitív egész számokat, hogy a $p^2>q^2+r^2$ egyenlőtlenség mindig teljesül, akkor ezek a képletek az összes pitagoraszi számnégyest előállítják.

Egyébként a képletek helyességét az is alátámasztja, hogy

$$(p^2-q^2-r^2)^2+(2pq)^2+(2pr)^2 = (p^2+q^2+r^2)^2. \tag{8}$$

A levezetett képletek segítségével képezzünk néhány pitagoraszi számnégyest és foglaljuk táblázatba!

p q r	$p^2-q^2-r^2$	$2pq$	$2pr$	$p^2+q^2+r^2$	Legnagyobb közös osztójukkal osztva
3 1 1	7	6	6	11	
3 2 1	4	12	6	14	2 6 3 7
3 2 2	1	12	12	17	
4 2 1	11	16	8	21	
4 3 1	6	24	8	26	3 12 4 13
4 3 2	3	24	16	29	
5 2 1	20	20	10	30	2 2 1 3
5 3 2	12	30	20	38	6 15 10 19
5 4 2	5	40	20	45	1 8 4 9

Észrevételek: 1. Ha p, q, r közül bármelyik kettő páratlan, és a harmadik páros, akkor $p^2-q^2-r^2$ és $p^2+q^2+r^2$ páros lesz, ezért mind a négy szám páros, hiszen $2pq$ és $2pr$ amúgy is mindig páros.

2. Ha p-nek és (q^2+r^2)-nek van közös osztója, akkor azzal mind a négy szám osztható (pl. a táblázat utolsó sorában).

3. Pitagoraszi számnégyeseket szolgáltatnak az

$$a = n, \quad b = n+1, \quad c = n(n+1), \quad d = n(n+1)+1$$

képletek is, bármely természetes szám is az n, hiszen az

$$n^2+(n+1)^2+n^2(n+1)^2 = [n(n+1)+1]^2$$

egyenlőség azonosság, de az így kapott pitagoraszi számnégyesek csak nagyon kis részét teszik ki az összes pitagoraszi számnégyesnek. (Ilyen pl. a táblázat 2. és 5. sorában levő egyszerűsített számnégyes.)

A pitagoraszi számnégyesek felhasználására, alkalmazására hamarjában három esetet említek:

1. Ha egy feladatban olyan téglatesttel kívánunk foglalkozni, amelynek mindegyik éle és a testátlója is természetes számmal fejezhető ki;

2. ha azt akarjuk, hogy egy derékszögletű tetraéder (az egyik csúcsából kiinduló három él páronként merőleges egymásra) mind a négy lapterületének a mérőszáma természetes szám legyen;

3. ha egy sík egyenletének együtthatóit úgy szeretnénk megválasztani, hogy a Hesse-féle normálalakra hozás természetes számmal való osztással legyen elvégezhető; akkor pitagoraszi számnégyest használhatunk fel.

Végül mondjunk néhány szót a további általánosításról, a pitagoraszi szám-n-esek előállításáról! Ha megfigyeljük a (8) alatti azonosságot, nem nehéz rájönni, hogy pitagoraszi számötösöket a

$$p^2-q^2-r^2-s^2, \quad 2pq, \quad 2pr, \quad 2ps, \quad p^2+q^2+r^2+s^2$$

képletek (feltéve, hogy $p^2>q^2+r^2+s^2$), és általában pitagoraszi szám-n-eseket a

$$p_1^2-p_2^2-\ldots-p_{n-1}^2, \quad 2p_1p_2, \quad 2p_1p_3, \ldots, 2p_1p_{n-1},$$
$$p_1^2+p_2^2+\ldots+p_{n-1}^2 \quad (p_1^2 > p_2^2+p_3^2+\ldots+p_{n-1}^2)$$

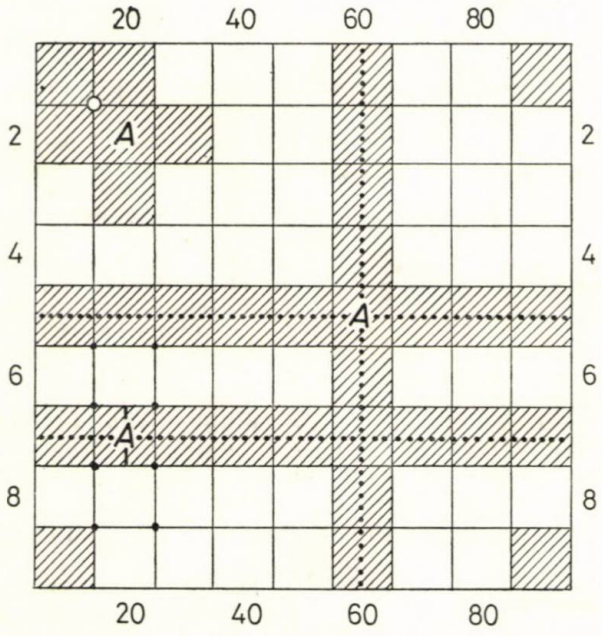
képletek szolgáltatnak, amelyekben mindegyik betű természetes számot jelent.

Ára: 5,50 Ft

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1983. december * XXX. évfolyam 6 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

83-4277—Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33, —Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Dr. Sárvári Józsefné: A PTK 1050 típusú zsebszámológép hasznosítása matematikaórákon az általános iskolákban 161
Schuster Gyula: Helyzetkép a gondolkodásra nevelés didaktikájáról 167
Darvasi Gyula: Egy versenyfeladat és a Hesse-féle alak 175
Hennyey Judit: SMYOZ — egy logikai játék II. 177
FELADATOK 186
Könyvesbolt érdekes szolgáltatással ..... IV.

СОДЕРЖАНИЕ

Д-р. Шарвари Йожефне: Использование карманной вычислительной машины типа ПТК 1050 на уроках математики в восьмилетних школах 161
Шустер Дюла: Описание положении обстановки в дидактике воспитания к мышлению 167
Дарваши Дюла: Одна олимпиадная задача и Гессе-форма 175
Хенньеи Юдит: Логическая игра SMYOZ II. 177
ЗАДАЧИ 186
Книжный магазин с интересной услугой. IV.

INHALT

Frau Éva Sárvári (geb.: *Sallai*): Die Nutzbarmachung des Taschenrechners vom Typ PTK 1050 in den Mathematikstunden der Grundschule 161
Schuster, Gyula: Situationsbild über die Didaktik der Erziehung zum logischen Denken 167
Darvasi, Gyula: Eine Wettbewerbsaufgabe und die Hessesche Normalform 175
Frl. Judit Hennyey: SMYOZ — ein logisches Spiel II. 177
AUFGABEN 186
Eine Buchhandlung mit einer interressanten Dienstleistung ..... IV.

DR. SÁRVÁRI JÓZSEFNÉ
szakfelügyelő
Miskolc, 34. sz. Általános Iskola

A PTK 1050 típusú zsebszámológép hasznosítása matematikaórákon az általános iskolákban

1982-ben Miskolc város minden általános iskolája kapott néhány darab PTK 1050 típusú zsebszámológépet. Anyagi viszonyaink egyelőre nem engedik meg, hogy olyan nagy számban vásároljunk gépeket, hogy iskolánként egy-egy osztályt tudjunk vele munkáltatni. Arra viszont túl drága ez a programozható számológép, hogy a nevelők csupán statisztikai számításokra használják. Ezért csokorba gyűjtök néhány lehetőséget és programot, amelyek felhasználásával a kevés számú gép is hatékony segítséget nyújthat a tanításban. Nem titkolt célom még a gép kihasználtságának fokozása mellett, hogy a tanári, szakfelügyelői mérések alapján tapasztalt hiányosságokat próbáljuk csökkenteni. Elsősorban a tanulók alapvető számolási készségének fokozását szeretném elérni vele. A gép használatával nagyobb lehetőség nyílna a tanult ismeretek alkalmazási szintjeinek széthúzására, a manipuláltatással egybekötött egyéni mérési, számítási eredmények alkotó módon való helyes felhasználására.

Módszerek, példák

1. Egyik ilyen lehetőség a geometriában adódik, a síkidomok területének és a testek felszínének, térfogatának kiszámításánál. A szertárak ma már rendelkeznek annyi műanyagból, fából vagy papírból készített testmodellel, hogy egy vagy két gyerekenként kézbe adhatjuk a tanított testet. A tanulók önállóan mérnek, önállóan alkalmazzák a tanult összefüggéseket és számolnak. Miután a mérési eredmények különbözők, a térfogat vagy felszín eredmények még jobban eltérnek. Eddig a tanár a magának kiszámolt eredmény megközelítését fogadta el, amely tartalmazhatott hibás, figyelmetlen számolást is, de a tanárnak nem volt ideje ezt felderíteni. Ezt kiküszöbölheti a nevelő, ha a tanított test térfogatának, felszínének általános kiszámítását beprogramozza a számológépbe, és az ellenőrzés folyamán a tanulók különböző mérési adatait beütve egy-két másodperc alatt megállapítja, hogy jó-e az eredmény. Az egyéni sebességtől függően már adhatja is a következő nagyságú testet, hogy minél többet dolgoztasson, számoltasson. (Ilyen leírások találhatók később az **1—7.** számozott programokban.)

2. A géppel való ellenőrzés szinte nélkülözhetetlen akkor, ha házi feladatnak adunk a tanult testekkel kapcsolatos mérést és számítást. Ilyen feladatok helyességéről eddig képtelenek voltunk meggyőződni, s ezért keveset alkalmaztuk, pedig gyakorlati haszna nagy.

3. Algebrai kifejezés számértékének kiszámításánál szintén sok lehetőség van a számoltatásra, differenciálásra. Egy algebrai kifejezésben a betűk helyére soksok számot adhatunk meg. Míg a gyengébbekkel a műveleti sorrendet és az egyszerűbb racionális számok műveleteit gyakoroltatjuk, addig a jóknak más-más, érdekesebb, nehezebb behelyettesítési feladatot adhatunk, akár minden gyereknek más számmal. Ha a pedagógus beprogramozza a gépbe a megfelelő algebrai

kifejezést, akkor az egész osztály munkája néhány perc alatt ellenőrizhető. (Ilyen feladatokat tartalmaz a **8.** és a **9.** program.)

4. Hasonló módon tölthető ki a függvényekhez tartozó értéktáblázat is. (Néhány példa látható a **10—13.** számú programokban.)

5. Számtani és mértani sorozatok tagjainak meghatározására is jól használható a számológép. (Példák a **14—16.** számú programokban láthatók.)

6. A százalékszámításra is található egy-egy példa a **17.** és a **18.** számú programban.

Segítség a programok elkészítéséhez

A nyári zánkai felkészítő tanfolyamon az ottlevők egy előadás keretében találkoztak a számológéppel. Emlékeztetőül nézzék át a kezelési útmutatóban (a „zöld füzetben") legalább a következőket:

— a billentyűk feliratának jelentését (7—8. oldal),
— a kettős funkciójú billentyűk működtetését (8. oldal),
— egyszerűbb műveleteket (4. oldal),
— matematikai műveleteket (20—21. oldal),
— programozást (25—26. oldal).

A programozás folyamata, a billentyűzés sorrendje

1. Bekapcsolás.
2. LRN: kezdődik a gép tanítása.
3. Ezután beütjük azokat a billentyűket, amelyek szükségesek a feladat megoldásához.
4. R/S: a program vége
5. RST: automatikus visszaállítás a program elejére.
6. LRN: kezdődik a számolási üzemmód
7. RST: számolóállásban is mindig vigye a program elejére.
8. A feladat konkrét adatainak beütése.
9. R/S: utasítás a gépnek, hogy futtassa le a programot.

Ha több ismeretlen (betű) fordul elő a feladatban, akkor a STO (tároló) és RCL (visszahívó) billentyűt használjuk. Minden ismeretlen (betű) más sorszámú memóriarekeszben tárolható, pl: STO 1, STO 2, RCL 1, RCL 2, ... és tetszőleges alkalommal előhívható. A programozás végén számolóállásban (az előzőekben a program leírásánál a **8.** lépés) a memóriában levő ismeretlen (betű) konkrét adatának beütése után a STO billentyűt ütjük be olyan sorszámmal, amilyennel az az ismeretlen a visszahívóban szerepelt. Pl.: ha a feladatban *a* és *b* ismeretlen szerepel, a programozásnál az *a*-t a STO 1, a *b*-t a STO 2 billentyűkkel rögzítettük a memóriában, és RCL 1-gyel, illetve RCL 2-vel hívjuk vissza. Számolóállásban, ha pl.: *a* értéke 5 és *b* értéke 3, akkor a beütési sorrend: 5 STO 1 és 3 STO 2. Ezután az R/S billentyű leütésével a számológép a feladatot ezzel a két számmal végzi el.

Néhány program részletes leírása

1. Kocka felszíne: $A = 6a^2$

LRN
x^2
×
6
=
R/S
RST
LRN
RST

a adatának beütése R/S

Kocka térfogata: $V = a^3$.

LRN
y^x
3
=
R/S
RST
LRN
RST

a adatának beütése R/S

2. Téglatest felszíne:

$A=(ab+ac+bc)\cdot 2.$

LRN
(
RCL 1 (a ezen a memórián)
×
RCL 2 (b ezen a memórián)
+
RCL 1
×
RCL 3 (c ezen a memórián)
+
RCL2
×
RCL 3
)
×
2
=
R/S
RST
LRN
RST

a STO 1 (ha $a=2$ cm, akkor 2 STO 1)
b STO 2 (ha $b=3$ cm, akkor 3 STO 2)
c STO 3 (ha $c=5$ cm, akkor 5 STO 3)

R/S (R/S = 62 cm²)

Téglatest térfogata:

$V=a\cdot b\cdot c.$

LRN
RCL 1
×
RCL 2
×
RCL 3
=
R/S
RST
LRN
RST

a STO 1 (pl. $a=2$ cm, 2 STO 1)
b STO 2 (pl. $b=3$ cm, 3 STO 2)
c STO 3 (pl. $c=5$ cm, 5 STO 3)

R/S (R/S = 30 cm²)

3. Négyzetes hasáb felszíne:

$A=2\cdot a^2+4\cdot ab.$

LRN
RCL 1 (a)
x^2
×
2
+
RCL 1 (a)
×
RCL 2 (b)
×
4
=
R/S
RST
LRN
RST

a STO 1
b STO 2
R/S

Négyzetes hasáb térfogata:

$V=a^2\cdot b.$

LRN
RCL 1 (a)
x^2
×
RCL 2 (b)
=
R/S
RST
LRN
RST

a STO 1
b STO 2
R/S

4. Henger felszíne:

$A=2\cdot r\cdot 3{,}14\cdot (r+m).$

LRN
RCL 1 (r)
×
2
×
3.14
×
(

Henger térfogata:

$V=r^2\cdot 3{,}14\cdot m.$

LRN
RCL 1
x^2
×
3.14
×
RCL 2 (m)
=

RCL 1
+
RCL 2 (m)
)
=
R/S
RST
LRN
RST

r STO 1
m STO 2
R/S

R/S
RST
LRN
RST

r STO 1
m STO 2
R/S

Megjegyzés: A tanulók a π értékét 3,14-nak veszik, ezért a gépbe is ezt az értéket tápláljuk be és nem a 2nd π-t.

5. Kúp felszíne:

$A = r \cdot 3{,}14 \cdot (r + a)$.

LRN
RCL 1 (r)
×
3.14
×
(
RCL 1
+
RCL 2 (a)
)
=
R/S
RST
LRN
RST

r STO 1
m STO 2
R/S

Kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot 3{,}14 \cdot m}{3}.$$

LRN
RCL 1 (r)
x^2
×
3.14
×
RCL 2 (m)
÷
3
=
R/S
RST
LRN
RST

r STO 1
m STO 2
R/S

6. Négyzetes gúla felszíne:

$A = a^2 + a \cdot m \cdot 2$.

LRN
RCL 1 (a)
x^2
+
RCL 1
×
RCL 2 (m_o)
×
2
=
R/S
RST
LRN
RST

a STO 1
m STO 2
R/S

Négyzetes gúla térfogata:

$$V = \frac{a^2 \cdot m}{3}.$$

LRN
RCL 1 (a)
x^2
×
RCL 2 (m)
÷
3
=
R/S
RST
LRN
RST

a STO 1
m STO 2
R/S

7. Gömb felszíne:

$A = 4 \cdot r^2 \cdot 3{,}14.$

LRN
x^2
×
3.14
×
4
=
R/S
RST
LRN
RST

---

r (az adott érték)
R/S

Gömb térfogata:

$$V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot 3{,}14}{3}.$$

LRN
y^x
3
×
3.14
×
4
÷
3
=
R/S
RST
LRN
RST

---

r (az adott érték)
R/S

8.—9. Algebrai kifejezés számértéke:

$$\frac{4 \cdot x^2 - 2 \cdot y \cdot z}{3}.$$

LRN
(
RCL 1 (x)
x^2
×
4
—
RCL 2 (y)
×
RCL 3 (z)
×
2
)
÷
3
=
R/S
RST
LRN
RST

---

x STO 1
y STO 2
z STO 3
R/S

$$\frac{a^2 - 2 \cdot x}{a - b}.$$

LRN
(
RCL 1 (a)
x^2
—
RCL 2 (x)
×
2
)
÷
(
RCL 1
—
RCL 3 (b)
)
=
R/S
RST
LRN
RST

---

a STO 1
x STO 2
b STO 3

Megjegyzés: a számlálóban és a nevezőben figyeljünk a zárójelre!

10.—12. Függvényhez tartozó értéktáblázat kitöltése:

$y = 5 \cdot x^2 + 10.$

LRN
x^2
×
5
+
10

$$y = \frac{x^2}{4} + 0{,}4.$$

LRN
x^2
÷
4
+
0.4

$y = 2 \cdot (x + 5)^2.$

LRN
(
RCL 1
+
5
)

=
R/S
RST
LRN
RST

x (az adott érték)
R/S

=
R/S
RST
LRN
RST

x (az adott érték)
R/S

x^2
×
2
=
R/S
RST
LRN
RST

x STO 1
R/S

13. Abszolútérték függvény:

$$y = \frac{|x+3|}{2}.$$

LRN
(
RCL 1
+
3
)
2nd $|x|$
÷
2
=
R/S
RST
LRN
RST

x STO 1
R/S

14. Sorozatok:

$-0{,}5$-del csökkenő sorozat, pl. 20-tól.

LRN
+
0.5
+/−
=
2nd Pause
RST
LRN
RST

20 (ahonnan a sorozatot indítjuk.)
R/S

15. 2-vel való szorzás pl. 1-től.

LRN
×
2
=
2nd Pause
RST
LRN
RST

1 (ahonnan indul)
R/S

16. -5-tel való osztás pl. 200-tól.

LRN
÷
5
+/−
=
2nd Pause
RST
LRN
RST

200 (ahonnan indul)
R/S

17. Százalékszámításra is írhatunk programokat. Például:
Egy áru árát először felemelik 20%-kal, majd az új árat csökkentik 20%-kal. Mennyi lesz a kétszeri változtatás után az ára?

LRN
×
1.2
×
0.8
=
R/S
RST
LRN
RST

az eredeti ár beütése
R/S

18. A takarékba 5%-os kamatra betett összeg növekedése.

```
LRN
×
1.05
=
2nd Pause
RST
LRN
RST
a betett összeg beütése
R/S
```

Megjegyzés: minden sorozatképzésnél azért kell a 2nd Pause billentyűket beütni, hogy a gép a tagok közé szünetet iktasson. Ha hosszabb szünetet akarunk beiktatni, akkor a 2nd és Pause billentyűket kétszer vagy háromszor is beüthetjük. A sorozatoknál a megállítás az R/S gomb hosszabb ideig történő benyomásával történik.

Ezt az összeállítást abban a reményben szeretném közreadni, hogy minél több általános iskolai matematika szakos tanár barátkozzon meg a számológép felhasználásával. A leírt programok, módszerek azoknak a kartársaknak kívánnak elsősorban segítséget nyújtani, akik még nem ismerték vagy most kezdik a programozást gyakorolni. A túlzott részletesség miatt a gépet jól ismerő kollégáktól elnézést kérek.

SCHUSTER GYULA
tanár
Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium

Helyzetkép a gondolkodásra nevelés didaktikájáról

Aligha vitatható, hogy a matematika tanításának tantervi céljai közül a logikus gondolkodásban és a szabatos fogalmazásban való jártasság elsajátítására az orvosnak, a jogásznak, az írónak és a politikusnak éppúgy szüksége van, mint például a mérnöknek vagy a fizikusnak. A tanítás során a tanárnak küzdenie kell a „látszateredmények" ellen, miközben arról is gondoskodnia kell, hogy a problémákat a tanult ismeretek felhasználásával, logikus gondolkodás alapján valóban meg is tudják oldani a tanulók. Az új tantervek lehetővé teszik, az új tankönyvek pedig igyekeznek teljesíteni a fenti kívánalmat, de a tanterv készítői — úgy vélem — feltételezik még a „tanári alkotómunkát" is egy-egy tanulócsoport matematikai nevelése során.

Néhány olyan didaktikai problémáról szeretnék a következőkben szólni, amelyek megoldási módja nincs eléggé tisztázva és ezért zavart okozhatnak éppen a tehetséges tanulók fejlődésében.

Pólya György írja: „... ha a közoktatás céljai közé tartozik, hogy a diák elsajátítsa ...a logikus gondolkodás lényegét, akkor ezt nem teheti meg a geometriai bizonyítások segítsége nélkül!" Azt várná az ember, hogy az értelmes tanulók kedvelik is a geometriát, hiszen „okoskodni" jobban szeretnek, mint számolni. Miért tartják mégis nehéznek? Tanárkollégáimmal már régebben is (lassan 30 évi tapasztalat áll mögöttem) észrevettük, hogy a *fő problémát a tanulók számára sokáig az jelenti, hogy nem tudják mit-mivel lehet indokolni! Nem éreznek ugyanis különbséget a „sajátmaguk által gyártott axiómák" és a tanár által szintén látszólag „ad hoc előrángatott axiómák" között!*

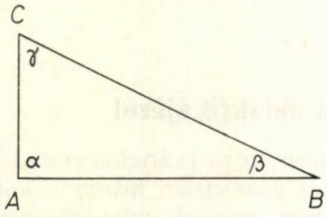
Talán változtatnunk kellene kicsit a geometria középiskolai bevezetésében évtizedek óta fennálló szemléleten, ha nem akarjuk, hogy az a vád érjen bennünket, hogy didaktikánk „nem egészen tisztességes". Egyrészt ugyanis éretlennek kiáltjuk ki a tanulókat arra, hogy a tanártól vagy a tankönyvből vázlatosan megértse a geometria felépítésének okokozati láncát, másrészt viszont elvárjuk, hogy erre magától rájöjjön. Lassanként rá is jön a tanuló valami ilyenfélére: *„így kell csinálni, mert ezt fogadja el jónak a tanár!"*. Miért?

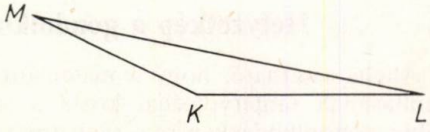
Nyilván nem lehet szó arról, hogy mondjuk a Hilbert-féle axióma rendszer alapján haladjunk a gimnázium I. osztá-

lyában. Ennek a ténynek azonban *nem volna szabad olyan végletes megoldásra vezetnie, hogy egyszerűen teljesen elhallgatjuk a geometria felépítésének még a „körvonalait" is.* Ha a tanulók logikus gondolkodását és bizonyításban való jártasságát fejleszteni kívánjuk, akkor ne csak valamiféle meg nem értett rutin kialakítására törekedjünk! Röviden szólva: *inkább egy kissé tökéletlen, de határozottan kimondott és semmiképpen sem „hallgatólagos" axióma és tételrendszerre volna szüksége a középiskolába kerülő diáknak, hogy már az elején tudja, mire lehet hivatkozni.*

Az alábbiakban szeretnék egy olyan didaktikai modellt ismertetni, amellyel kedvező tapasztalatokat szereztem.

a) A gimnázium I. osztályába került tanulók igen gyorsan megértik, hogy miért nem fogadható el például bizonyításként a még olyan pontos mérés sem a legtöbb geometriai állítás esetén. Elég például arra hivatkozni — rajzzal kísérve — hogy ha az ABC háromszög belső szögeinek összegéről igen pontos méréssel kiderült, hogy $\alpha+\beta+\gamma=180°$, akkor még semmit sem mondhatunk a más alakú KLM háromszög szögeinek összegéről mérés előtt, hisz a mérés mindig egy esetre vonatkozik.





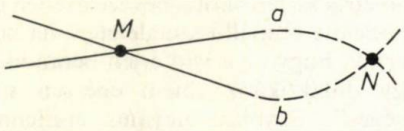
Kérdés tehát, hogy ha méréssel nem, akkor hogyan lehet bizonyítani egy *olyan tételt*, amely például *minden háromszögre* vonatkozik?

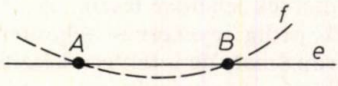
Válasz: olyan tételek segítségével, amelyek mondjuk minden egyenesre vagy minden szögre vagy minden középpontos tükrözésre stb. igazak éspedig logikai úton, következtetéssel.

Szükség van olyan állításokra (axiómákra) is, amelyeket bizonyítás nélkül igaznak fogadunk el. Ilyen lehet például a pontokra és egyenesekre vonatkozó a következő két állítás közül legalább egyik:

(1) Két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet.

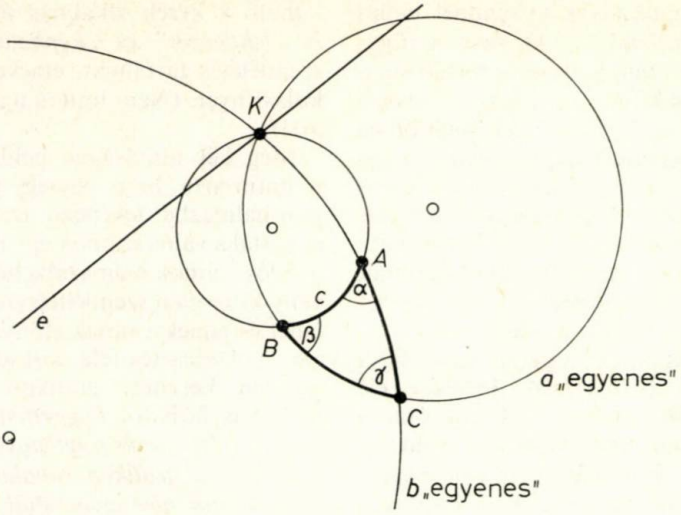
(2) Két pontnak legfeljebb egy közös egyenese lehet.





Érdekes, hogy a második állítás nem annyira nyilvánvaló a tanulók egy része számára, mint az első. Mindenesetre élményszerű, ha megmutatjuk, hogy a két állítás bármelyike bizonyítható a másikból (indirekt úton). Ezenkívül érdemes itt felhívni a tanulók figyelmét arra, hogy a pont és egyenes „mibenlétét" többek között éppen a fenti tételek jellemzik.

Érettségi előtti összefoglalásnál vagy szakkörön előbb is érdekesnek bizonyult annak a síkgeometriai modellnek a vizsgálata, amelyben idézőjeles „egyenesnek" tekintjük egy K pontban „lyukas" sík K ponton „áthaladó" köreit és egyeneseit. A pont fogalma nem változik. Ez a modell az euklideszi párhuzamossági axiómát is teljesíti változatlan párhuzamosság fogalommal (nincs közös pont!). Az ABC „háromszög" szögeinek összege 180°. (Ívek szöge = érintők szöge.)



Az (1) és (2) axiómák után a síkkal kapcsolatos néhány axiómára is sor kerülhet, de ezekre kezdetben nincs szükség, ezért rátérhetünk a párhuzamosság fogalmára és a *párhuzamossági axiómára (3)*. Érdekes, hogy a tanulók többsége — kérdésünkre — az euklideszi variáció mellett foglal állást. Megemlíthetjük, hogy más axióma is elképzelhető (pl. Bolyai geometria).

Nem részletezem a Korányi-féle I. osztályos tankönyvben (28—34. oldal) igen jól összegyűjtött fogalmak tárgyalását, amit legfeljebb egy rendezési axiómával lehetne bővíteni. Szakasz hosszának fogalmát III. osztályban, a fakultatív anyagban tudjuk majd tisztázni, a terület előtt. Meggondolandó kérdés, hogy nem volna-e célszerű a zsúfolt III. osztály előtt már itt bevezetni egy pont síkbeli „környezetének" és később a sík transzformációinak adott pontban való „folytonosságának" fogalmát.

Visszatérve a háromszög szögösszegének kiindulásként felvetett problémájához, már csak a váltó (és egyállású) szögek egyenlőségének belátása szükséges. Ez a sík pont körüli 180°-os elforgatásának azon a tulajdonságán múlik, hogy *egyenes képe önmaga vagy párhuzamos egyenes* (lásd például Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába 12.1. tétel.) Ez utóbbi bizonyításához viszont egy igen fontos axiómára van szükség:

(4) *A tér minden (merev) mozgatása síktartó, egyenestartó, sőt távolság és szögtartó transzformáció.*

Sajnos ez az axióma nem kiemelten — vastag betűvel — szerepel az I. osztályos tankönyvben és úgy tűnik, mintha mindig ott helyben, véletlenül találná ki újra és újra a tankönyvszerző (257., 258. oldal).

Van azonban más hiba is! Azt hiszem nem vitás, hogy a 4. számú axiómára szükség van. Akkor viszont legalábbis kérdéses, hogy az említett tétel bizonyítása miért éppen ezzel a tétellel bizonyítható váltószögek egyenlőségére vonatkozó tétellel történik, ráadásul figyelemelterelés céljából valami „bűvös" „fogantyúra" való hivatkozással? Vajon eléggé „tisztességes" ez a didaktikai eljárás? (306. oldal.)

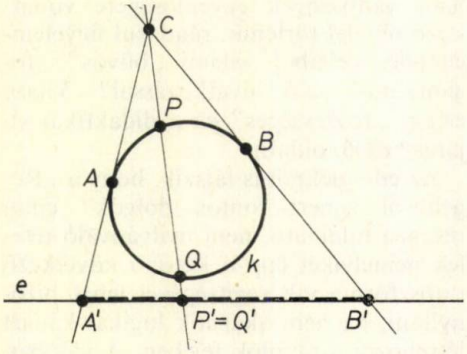
Az eddigiekből is látszik, hogy a „Régebbről ismert fontos dolgok" című részben található, nem nyilvánvaló tételek némelyikét épp a később következő transzformációk segítségével lehet bizonyítani, ha nem akarunk logikai káoszt létrehozni a tanulók fejében. A valóban közvetlenül belátható 4. axióma után vajon mi lehet az akadálya az ált. iskolából szintén ismert transzformációk egy

részének a tankönyvi sorrendnél előbb való tárgyalásának? Csak nem a függvényfogalom számhalmazokon való megalapozásának hiánya? De hiszen a *Ponthalmazok című fejezethez legalább olyan jól illik a leképezés fogalma, mint a számhalmazokhoz, sőt a transzformációk szemléletesebbek is!* (A Venn-diagram is ponthalmaz, a nyíldiagram is, a koordináta tengelyek is!) A függvényeknél használt jelölésrendszerhez képest a VI. fejezet egyébként visszaesést is jelent.

A két adott ponttól egyenlő távolságra levő pontok halmazának keresése elé könnyen beiktathatnánk néhány órát a ponthalmaznak ponthalmazba való leképezésének fogalmáról és a jelölésekről. Íme egy példa: A füzet síkján legyen $K:=$ {a k kör pontjai}, $E:=$ {az e egyenes pontjai}, $C:=$adott pont. Az f transzformáció (függvény) a K halmazt leképezi az E halmazba, úgy hogy a K halmaz minden P pontjához egyértelműen hozzárendeli az E halmaz egy-egy pontját a következő utasítással : $P':=$a CP egyenesnek az e egyenessel való metszéspontja. Jelölésekkel ez így fest:

$$f: K \to E, \forall P \in K \text{ pont esetén } P \mapsto f(P) = P'.$$

Elnevezések: $K =$ *értelmezési tartomány*, $E =$ *képhalmaz*, $A'B' =$ *értékkészlet*. Jól látható, hogy ez a hozzárendelés „megfordítva" *nem* egyértelmű, nem tekinthető függvénynek.



A tanulók számára tetszetősen fogalmazva itt egy „keréknek" egy lámpa fénye által a „padlón" létrehozott árnyék*képe* látható a kerék alkalmas állása esetén. A *„leképezés"* és *„képhalmaz"* szavak szemléletes tartalmat, elnevezésük indokolást nyer. (Nem fontos ugyan, de nem árt!)

Még két tanulságos példát szeretnék mutatni arra, hogy egy-egy ponthalmazt ponthalmazba leképező transzformáció egyúttal a valós számok egy részhalmazát a valós számok halmazába leképező függvény közvetlen szemléltetésre is alkalmas lehet és ennek vannak előnyei. A leképezés a Descartes-féle koordináta rendszerben készített grafikon közvetítése nélkül is látható. *Függetleníthetjük magunkat a leképezés folytonosságának vizsgálatánál a grafikon vonalának sokakat megtévesztő megfigyelésétől és közvetlenül a kérdéses pont környezetének és az értelmezési tartomány közös részének leképeződési viszonyaival törődhetünk.* (Gondoljunk csak arra, hogy ha az értelmezési tartomány a racionális számok halmaza.)

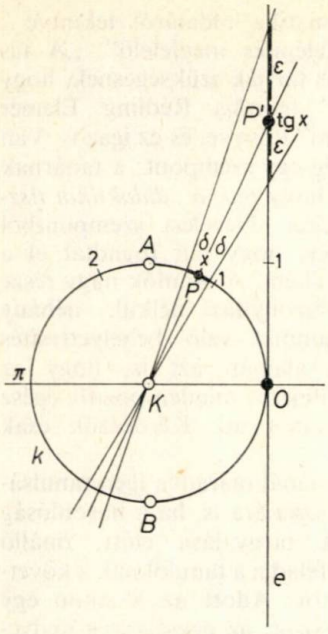
Az első ábrán a két pontjától (A-tól és B-től) megfosztott k kört K középpontjából centrális vetítéssel képezzük le az e egyenesbe, amely az O pontban érinti a kört. Ha a kört egységnyi sugarúnak vesszük és egységnyi hosszú íveket, illetve szakaszokat mérünk fel az O pontból indulva a körre, illetve egyenesre, akkor mindkét ponthalmazon a valós számok egy részhalmazát ábrázolhatjuk és a leírt leképezés egyúttal egy valós-valós függvényt is megad szemléletesen:

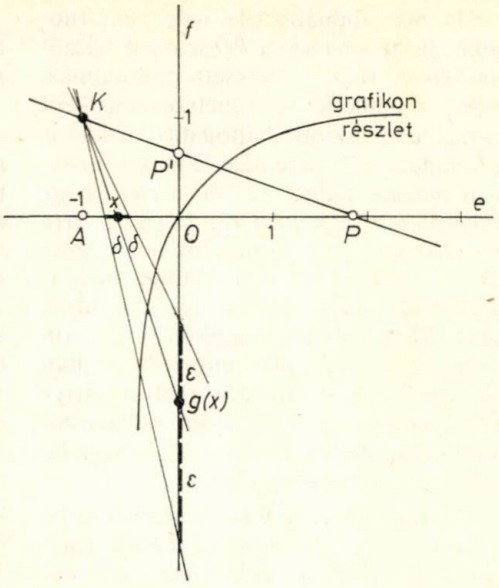
$$t: \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \operatorname{tg} x (k \in \mathbf{Z}).$$

A második ábrán egy A pontjától megfosztott e egyenest képezünk le a K ponton át való centrális vetítéssel az f egyenesbe, amely az O pontban merőlegesen metszi az e egyenest. Legyen $d_{eK} = d_{fK} = 1$.

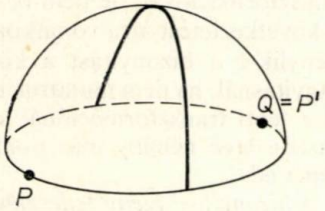
$$t: \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \operatorname{tg} x \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

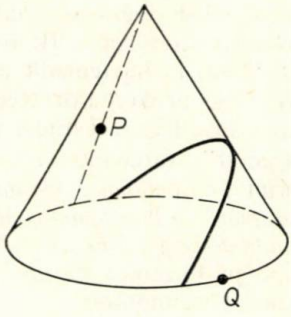
$$g: \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 1 - \frac{1}{x+1}.$$





Ha két pontot (P-t és Q-t) kijelölünk egy felületen (pl. a síkon), és a felület olyan pontjainak halmazát keressük, amelyek a térben egyenlő távol vannak a P és a Q ponttól, akkor az I. gimnáziumi Korányi-féle tankönyv 40. oldalának módszerét követve hajutsk össze a felületet úgy, hogy P és Q fedje egymást (eközben a felület görbül, hajlik, remélhetőleg nem nyúlik), majd pedig „nyomogassuk, simogassuk" addig, míg kettős felület nem jön létre egy *ún. „hajtási éllel"*. A hajtási él pontjai mind megfelelnek követelményeinknek, hisz $P=Q$-tól egybevágó „ívek" vezetnek a hajtási él egy-egy R pontjához, ezért a PR és QR húrok is egyenlők. A $P=Q$ egyesített pontok nem minden felületnél lesznek a hajtási él síkján — sőt az is kérdés, hogy egyáltalán síkgörbe-e a hajtási él? Gondoljunk például egy félgömbre (fél gumilabdára)! *A hajtási él itt félkör és az is marad* a felület „visszaállítása" után is. Vagy gondoljunk egy forgáskúpon levő P és Q pontra! Ez a felület síkba teríthető, ezért egyszerűbb a fenti hajtási él létrehozása. A kúpfelület visszaalakítása után a kúpfelületen ellipszist, hiperbolát, parabolát, egyenest szolgáltat a „hajtási él".





Ha már tudnánk (de még nem tudjuk!), hogy a térben a PQ szakasz felezőmerőleges *síkja* a keresett ponthalmaz, akkor a felülettel való metszésvonalként egyszerűen adódik hajtogatás nélkül is a „hajtási él" mibenléte. Enélkül azonban *honnan tudjuk pl. sík esetén, hogy egyenes lesz a hajtási él*? Látjuk? Arra hivatkozunk, hogy a tanulók nem igénylik a bizonyítást? Valószínűleg nem is fogják soha igényelni, ha úgy szoktatjuk őket. Mindenesetre a tankönyv 269. oldalán már igazán nem indokolt a „hajtási élre" való hivatkozás ahelyett, hogy az egyenlőszárú háromszög szögfelezőjéről kimutatnánk, hogy az a háromszögnek is szimmetriatengelye.

A térmozgás axiómája kapcsolja össze a sík összes egybevágósági transzformációját. *Nem érthető számomra,* hogy *milyen elgondolás* vezette a tanterv készítőit akkor, amikor *a sík pont körüli elforgatását a II. osztályba* helyezték át? Csak azt a 4 oldalt találták soknak, ami a II. osztályos tankönyvben erről szól? Ezzel szemben milyen hátrányokkal járhat, ha az egybevágósági transzformációk gyakorlására szolgáló feladatok köréből kirekesztjük a forgatást. Hát még ha kizárólag egyenként tanítjuk és csakis külön gyakoroltatjuk az egyes transzformációkat! Vajon nem vezet-e ez kizárólag típusfeladatok sztereotip megoldására való képességre? Honnan fogja tudni a tanuló később, hogy melyik transzformációt használja, ha a *feladathoz illő transzformáció megkeresésében,* kikísérletezésében *nincsen gyakorlata*?

b) A „Hasonlóság" című témakört szerintem igen jól és igényesen oldotta meg dr. Korányi Erzsébet a II. osztályos tankönyvben, pedig fennállt a veszélye annak, hogy például a dr. Rédling Elemér által javasolt és a Tanterv által is „megengedett" variációt választja, amely szerint *axiómának tekintendő* (szemlélet alapján!) *a középpontos nagyítás minden tulajdonsága,* még az is, hogy egyenes képe párhuzamos egyenes, ha nem halad át a középponton!

„A matematika oldaláról tekintve... bármelyik felépítés megfelelő", „A tanulók nem is tartják szükségesnek, hogy ...igazoljuk" mondja Rédling Elemér „módszertani" könyve, és ez igaz is. Van azonban még egy szempont: a tanárnak tudnia kell, hogy *mik a „didaktikai tisztesség" határai.* Nevelési szempontból nem mindegy, hogy mit fogadtat el a tanár axiómaként. A tanulók nagy része elfogadná bizonyítás nélkül, néhány konkrét számmal való behelyettesítés tapasztalata alapján azt is, hogy az n^2-n+41 kifejezés minden pozitív egész n-re prímszámot ad. Kérdezzük csak meg!

A geometriánál maradva igen tanulságos a tanár számára is, ha a hasonlóság témakörének tárgyalása előtt, önálló megoldásra feladja a tanulóknak a következő feladatot: Adott az $\mathbf{S}$ síkon egy ABC háromszög; az egységesség kedvéért Descartes-féle koordináta rendszerben: $A(-1;\ 2)$ $B(5;\ -1)$ és $C(2;\ 5)$ csúcsokkal. Határozzuk meg körző és vonalzó segítségével mibe viszi át az ABC *háromszöget* az alábbi — az $\mathbf{S}$ síkot önmagába leképező — transzformáció:

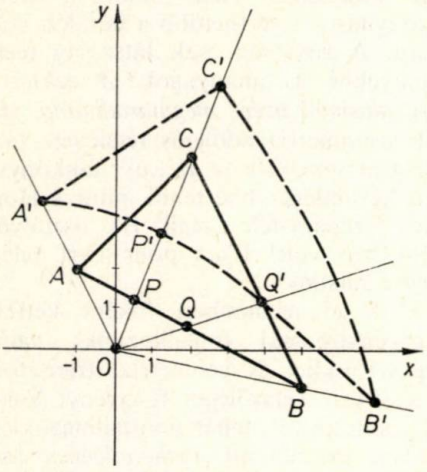
$$f:\mathbf{S}\to\mathbf{S},\quad P\mapsto f(P)=P' \quad \text{éspedig}$$

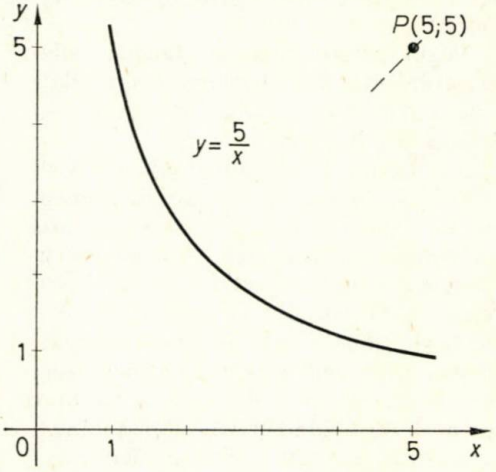
$$\begin{cases}\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\dfrac{2}{|\overrightarrow{OP}|}\cdot\overrightarrow{OP}, \text{ ha } P\neq O\\ \text{és } O'=O, \text{ ahol } O \text{ az origó.}\end{cases}$$

Tapasztalat szerint a tanulók nagy része feltételezi az *ABC háromszög oldalainak képéről,* hogy egyenesszakaszok és ezért csak az A, B, C pontok képét szerkeszti meg. Ez a transzformáció pedig nem egyenestartó. Nem hibáztathatjuk a tanulókat, ha sohasem találkoztak ilyen transzformációval, de nem is vonhatunk le következtetést arra vonatkozóan, hogy igénylik-e a bizonyítást a középpontos nagyításnál, ha nem mutattuk meg például a fenti transzformációnál az AB szakaszon levő néhány más pont (P és Q) képét is!

A bizonyítási igény fejlesztésében alap-

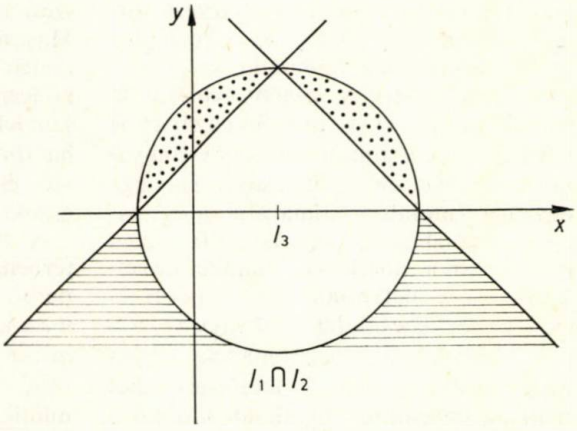
vető fontosságot kellene tulajdonítanunk az egészséges kételkedésre, óvatosságra való nevelésnek. Ehhez nem árt időnként később sem néhány alkalmas feladat. Kérdezzük meg például a koordináta-geometria gyakorlása közben, hogy az $y=\frac{5}{x}$ egyenletű hiperbola melyik pontja van legközelebb a $P(5; 5)$ ponthoz. A feladat megoldási módja is érdekes.





c) Egy 1983-ban érettségizett fakultatív csoport lepett meg a IV. osztályos év eleji ismétlés során olyan élménnyel, amely megerősítette azt a meggyőződésemet, hogy *igen veszélyes lehet, ha a tanulók hozzászoknak, hogy sajátmaguk által kitalált, indokolás nélküli tételekkel is dolgozhatnak. Inkább óvatosságot és kételkedést kell kialakítanunk bennük és hangsúlyozni, hogy legalább azt tudják, hogy mit nem tanultak!*

Az „Összefoglaló feladatgyűjtemény" 2701. feladatát egy-két tanuló kivételével mindenki úgy akarta megoldani, hogy felírta a monoton növekedés feltételét az (a_n) és (b_n) sorozatokra, azután *a két egyenlőtlenség megfelelő oldalait gátlás nélkül összeszorozta.* Igaz ugyan, hogy a tantervi anyagban erre vonatkozó tétel nem szerepel, mégis „elképesztő" volt számomra az a gyanútlanság, amellyel IV. osztályos korukban képesek voltak dolgozni. Fel sem merült bennük a kétely, hogy nem tanultak ilyesmiről, viszont láthatták törtes egyenlőtlenségeknél is hogy egy egyenlőtlenséget nem lehet „csak úgy végigszorozni" $(4-x)$-szel. Ezek után nyilván nem gondoltak egyszerű ellenpélda konstruálására sem a kérdéssel kapcsolatban: igaz-e, hogy $a_n b_n = c_n$ is monoton nő? Igen érdekes és tanulságos a következő konkrét példa grafikus vizsgálata:



ha $y<x+1$ igazsághalmaza I_1,
és $y<4-x$ igazsághalmaza I_2,
és összeszorozva

$y^2 < -x^2+3x+4$ igazsághalmaza I_3, azaz $(x-1{,}5)^2+y^2<6{,}25$ igazsághalmaza I_3, akkor I_3-ról még az sem állítható, (ami egyenletek esetén igaz volna!) hogy I_1 és I_2 metszete részhalmaza I_3-nak. *Gyökvesztés* és *hamis gyök* egyaránt létrejön.

Végül persze elégséges feltételt állapítottunk meg általában arra, hogy mikor állítható $a<b$ és $c<d$ esetén, hogy $ac<bd$ is igaz $I_1 \cap I_2$ esetén.

d) Örömmel üdvözölhettük a fakultatív III. osztályos tananyagban megjelent újdonságot, a vektorok sklaláris szorzatát, hisz ezzel igen sok feladat megoldása elegánsan egyszerűvé tehető. Ezenkívül példát látnak a tanulók *olyan „műveletre", amely nem asszociatív.* Igaz, ugyan, hogy nem egészen azért nem lehet szó asszociativitásról, mintha $(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\circ\mathbf{c}$ és $\mathbf{a}\circ(\mathbf{b}\circ\mathbf{c})$ általában különböző irányú, „számmal szorzott" vektorok lennének! Itt ugyanis szó sincs számmal való szorzásról, külön megegyezés nélkül! (III. osztályos A-fakultációs tankönyv 165. oldal). Talán *elősegítené a logikus gondolkodásra nevelést* az is, *ha kezdetben nem úgy jelölnénk két vektor skaláris szorzatát, mint egy szám és vektor szorzatát, mivel a* **b** *más művelet, mint* **a** **b** *azaz* $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$. Jól megvilágítható itt a valós számok néhány, a tanulók által túlzottan magától értetődőnek tartott (ezért formálisan ismert) tulajdonsága. Például a valós számok esetén fennálló $|ab|=|a||b|$ azonosság vektorok esetén $|\mathbf{ab}| \leqq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ formában igaz csak, ami önmagában is sokszor használható (Cauchy-Bunyakovszkij féle egyenlőtlenség). Ha egy egyenlet kiindulási halmaza a valós számok részhalmaza, akkor $a \neq 0$ esetén $ax=ab$-ből a „mérlegelv" alapján következik $x=b$, illetve $a(x-b)=0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a=0$ vagy $x-b=0$. Mindez vektoregyenletek esetén nem egészen így fest! A mérlegelv tehát nem az egyenlőség fogalmának logikai következménye.

Sajnos az alaptantervű III. osztályokban idő hiányában nem értik meg jól a tanulók a skaláris szorzatot, ezért minden további vele levezetett összefüggés (cosinustétel, egyenes egyenlete) is — félő —, hogy csak formális marad. Szerintem **az alaptantervből törölni kellene a skaláris szorzatot** a „didaktikai tisztesség" érdekében! Nem mindig a rövid bizonyítás a legérthetőbb a tanulók számára. A rövidség csak látszólag teszi könnyebbé a tananyagot. *A vektoros tárgyalásmód azért megmaradhatna,* **sőt** a trigonometria addíciós tételeinek tárgyalását sem kellene az „új" tankönyvben kezdetlegesebbé tenni, mint a Horvay—Czapáry-féle „régi" III. osztályos könyvben volt! L'art pour l'art talán mégse újítsunk!

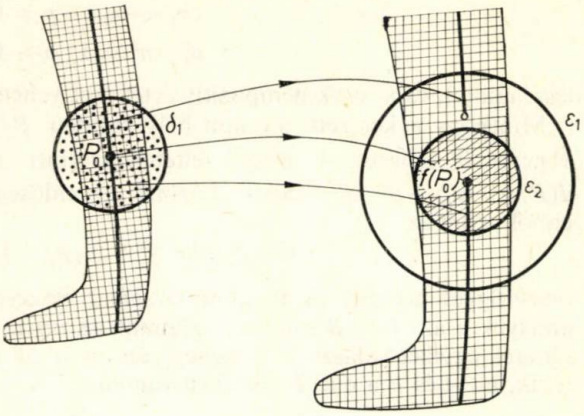
e) A gimnáziumban főként kétféle függvénytípussal foglalkozunk: valós függvényekkel és geometriai transzformációkkal. Tetszőleges függvényt Venn diagrammokkal, tehát ponthalmazokkal szokás szemléltetni. *Érthetetlennek tartom, hogy függvények adott pontban való folytonosságának fogalmát miért nem ponthalmazok leképezésének segítségével vezetjük be. Ennek több előnye is volna.* Először is megszabadulhatnánk attól a sok diákot (de némely tanárt is) megtévesztő nézettől, amely a függvény folytonosságát a „grafikon" vonalának összefüggőségétől teszi függővé. Eszerint egy $\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ függvény eleve nem lehet szerintük folytonos.

Másodszor: transzformáció vizsgálata esetén kénytelen mindenki a leképezésre koncentrálni, grafikonról legtöbbször szó sem lehet, és ez a rutin akkor is hasznos, ha történetesen $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényről van szó és mellékesen rendelkezésre áll a grafikon is.

A P_0 pont ε sugarú *„környezetén"* a térben, a síkon és egyenesen a P_0 középpontú nyílt gömb és a fenti ponthalmazok metszetét értjük. *Egy f függvény akkor folytonos a P_0 pontban,* ha $f(P_0)=P_0'$ bármely ε sugarú környezetéhez mindig található P_0-nak olyan δ sugarú környezete, hogy f-értelmezési tartományának ez utóbbi környezetbe eső minden P pontját a leképezés $f(P_0)$-nak éppen a kívánt ε sugarú környezetébe

viszi át. Tréfás stílusban: legyen az értelmezési tartomány egy ritka szövésű harisnya, a transzformáció pedig történjen azáltal, hogy valaki felhúzza a lábára a harisnyát, és eközben egy P_0 pontnál elszakad egy szál (felfut a szem). Összehasonlítva a kezdő és végállapotot, látható hogy ez a transzformáció a P_0 pontban *nem* folytonos és *ez nem az eredeti harisnya ritka szövésén, hanem azon múlik, hogy nem minden* $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$*-hoz található alkalmas* $\delta \in \mathbf{R}^+$! Másik példa lehet a *b)* pontban említett leképezés.

ε_1-hez található δ_1. Található-e ε_2-höz δ_2?



DARVASI GYULA
főiskolai adjunktus
Nyíregyháza, Bessenyei György Tanárképző Főiskola

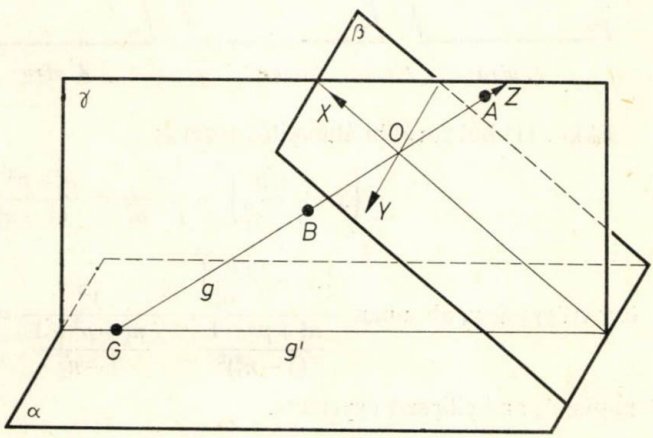
Egy versenyfeladat és a Hesse-féle alak

A tanárképző főiskolák hallgatóinak egy korábbi versenyén szerepelt a következő feladat: Állapítsuk meg két adott ponton átmenő és adott síkot érintő gömbök középpontjainak mértani helyét!

Most erre a feladatra adunk analitikus geometriai megoldást a sík egyenlete Hesse-féle alakjának felhasználásával.

Legyen a két pont A és B, a rájuk illeszkedő egyenes g, az adott sík pedig α! A feladat megoldásánál a $g \in \alpha$ eset eleve nem lehetséges; marad tehát az a két lehetőség, hogy g metszi az α síkot vagy $g \| \alpha$.

Az első eset vizsgálatához tekintsük az 1. ábra szerinti elrendezést, ahol β jelöli az A és B pontok szakaszfelező síkját, γ pedig a g és g' egyenesek síkját, ha g' a g egyenesnek α-ra vonatkozó merőleges vetülete. Ekkor a keresett mértani hely pontjai a β síkban vannak. Vezessünk be olyan derékszögű koordináta-rendszert, amelynek x tengelye a β és γ síkok metszésvonala, z tengelye a g egyenes, y tengelye pedig a β sík x-re és z-re merőleges egyenese úgy, hogy jobbsodrású rendszer álljon elő! Így az origó az AB szakasz felezőpontja lesz, és az A (0; 0; 1),



1. ábra

B $(0; 0; -1)$ megadási mód is bevezethető. Továbbá a választott elrendezés miatt az α sík egyenletének Hesse-féle alakja

$$\left.\begin{aligned} n_1 x + n_3 z - p &= 0 \\ n_1^2 + n_3^2 &= 1,\ p > 0 \end{aligned}\right\}$$

lesz, ahol n_1 és n_3 csak nempozitív értékeket vehetnek fel.

Minthogy a keresett mértani hely minden P pontja a β síkban van, azokra $P(x; y; 0)$ teljesül. A feladat feltétele szerinti $d(P; A) = d(P; B) = \sqrt{x^2+y^2+1}$ és $d(P; \alpha) = n_1 x - p$ távolságok közötti egyenlőségből $\sqrt{x^2+y^2+1} = n_1 x - p$, majd ebből pedig az

$$(1-n_1^2)x^2 + y^2 + 2n_1 px + 1 - p^2 = 0 \qquad (1)$$

összefüggés adódik. A további vizsgálat részesetek megkülönböztetéséhez vezet, amelyekre az A és B pontok, valamint az α sík elhelyezkedését — az α határsíkú félterek egyikét választva — egy-egy ábrán adjuk meg. (A megoldás jellege nem változik, ha A és B a másik féltérben vannak.)

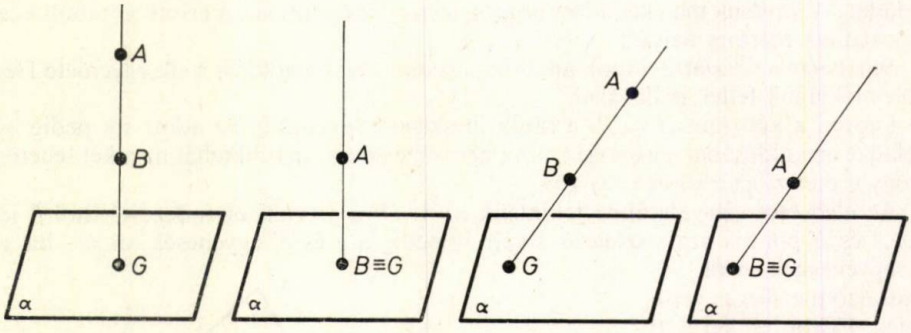
a) eset: $n_1 = 0$ és $p > 1$ (2. ábra).

(1)-ből $x^2 + y^2 = p^2 - 1$ adódik, amely egy kör egyenlete.

b) eset: $n_1 = 0$ és $p = 1$ (3. ábra).

(1)-ből $x^2 + y^2 = 0$ adódik, ami az origó egyenlete.

c) eset: $-1 < n_1 < 0$ és $\sqrt{1-n_1^2} < p$ (4. ábra).



2. ábra *3. ábra* *4. ábra* *5. ábra*

Ekkor (1)-ből további átalakítás vezet az

$$\left(x + \frac{n_1 p}{1-n_1^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-n_1^2} = \frac{n_1^2 + p^2 - 1}{(1-n_1^2)^2} \qquad (2)$$

összefüggéshez, ahonnan $\dfrac{\left(x + \dfrac{n_1 p}{1-n_1^2}\right)^2}{\dfrac{n_1^2+p^2-1}{(1-n_1^2)^2}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{n_1^2+p^2-1}{1-n_1^2}} = 1$

kapható, ami ellipszis egyenlete.

d) eset: $-1 < n_1 < 0$ és $\sqrt{1-n_1^2} = p$ (5. ábra).

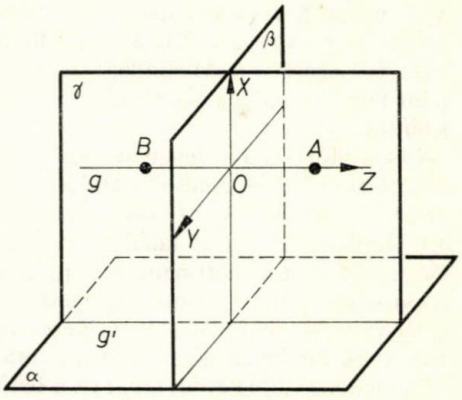
(2)-ből $\left(x+\frac{n_1 p}{1-n_1^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-n_1^2}=0$ adódik, amelyből az $\left(x+\frac{n_1}{\sqrt{1-n_1^2}}\right)^2+\frac{y^2}{1-n_1^2}=0$ egyenlet kapható, aminek a β síkban csak a $P\left(-\frac{n_1}{\sqrt{1-n_1^2}};\ 0\right)$ pont tesz eleget. Ezzel az első eset vizsgálatát befejeztük.

A $g \| \alpha$ esetben $\mathbf{n}(-1;\ 0;\ 0)$ teljesül (6. ábra). Ezért (1)-ből

$$y^2-2px+1-p^2=0$$

adódik, ami egy parabola egyenlete. Ez az eset nem bomlik további részesetekre. Érdemes viszont megjegyezni, hogy a parabola paramétere azonos az α sík és az origó távolságával, ami itt egyben g és α távolságát is jelentheti.

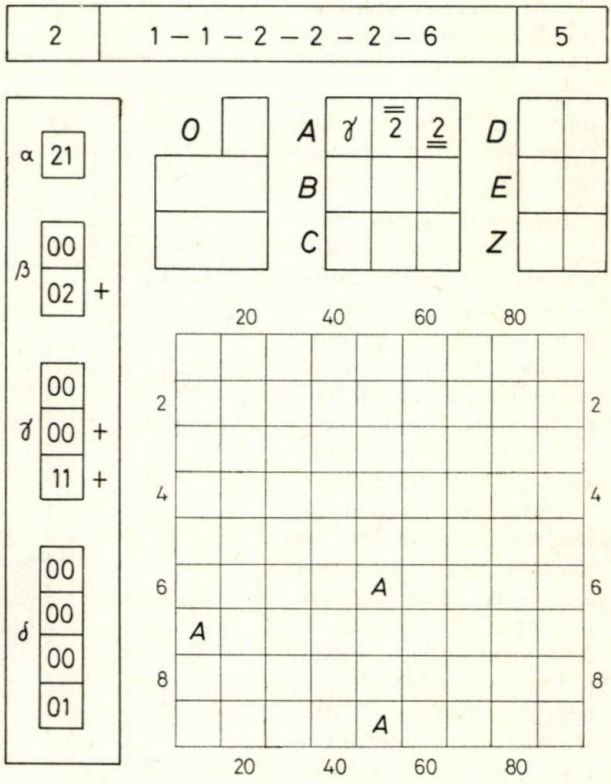
HENNYEY JUDIT
általános iskolai tanár
Budapest



6. ábra

SMYOZ — Egy logikai játék II.

A színek használata ebben a játékban nagyon fontos. Technikai okok miatt színt nem használhatunk a lapunkban, ezért kérjük a kedves Olvasóinkat, hogy az ábrákon a pontozott vonalakat zölddel, a szaggatott vonalakat pirossal húzzák át. Ilyen, feltétlen színezést kívánó ábra: 7.2., 7.3., 7.4., 7.5., 7.6., 7.7., 7.8., 7.9., 8.3., 8.4., 8.5., 8.6., 8.7., 8.8., 9.2., 9.3., 9.4., 9.5., 9.6., 9.7., 9.8., 9.9. *(Szerkesztő.)*



7.1. ábra

6. Első példa

A fentiekben elkészítettünk egy smyoz-felállítást, meghatároztuk kezdeti adatait és bediktáltuk ellenfelünknek: pillanatnyilag smyoz-űrlapja, melyen felállításunkat reprodukálni készül, a 6. ábrán látható (a 9×9-es smyoz-tábla teljesen üres). Tegyük föl, ellenfelünk úgy határozott, hogy az A sorozat mindhá-

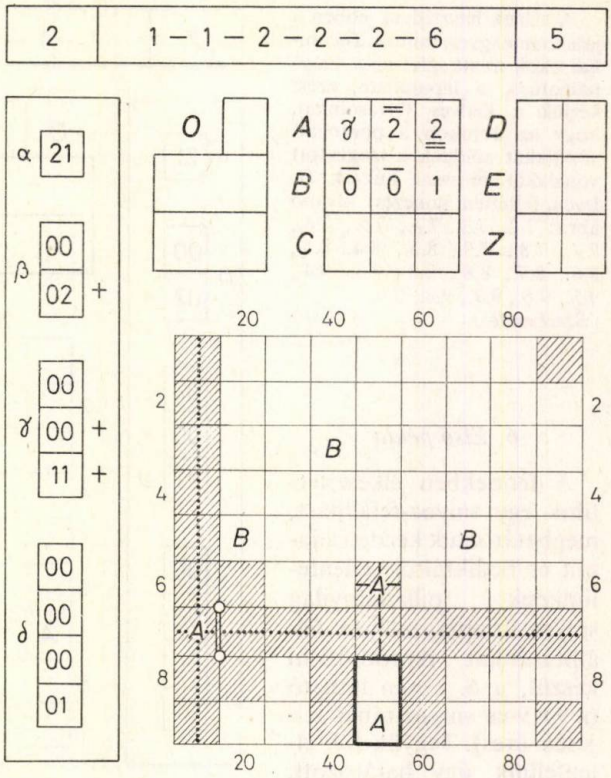
rom lövését leadja — a 17-es, 56-os, 59-es mezőket választva. Bemondjuk a találatokat: van egy fehér gammája, egy dupla-piros kettese és egy dupla-zöld kettese (a görög betű hajót, a szám vizet jelent, mint tudjuk), ezeket a megfelelő rubrikákba írva, űrlapja a 7.1. ábrán látható lesz. (Célszerű megállapodás: a piros színt felülvonással, a zöldet alulvonással jelezzük.)

Mostantól kezdve felejtsük el a saját felállításunkat, és gondolkozzunk partnerünk helyében. Az *A* sorozatban van egy dupla-piros kettes találatunk; ilyen vízmező a part mellett nem lehet (a dupla-piros víz mind vízszintesen, mind függőlegesen két hajó között helyezkedik el!), csak 56 lehet dupla-piros. Ezután 59 nem lehet dupla-zöld, tehát ez a fehér gamma. Végül 17 a dupla-zöld kettes; mindezt berajzolva, jutunk el a 7.2-es ábrához. Úgy ítéljük, hogy az *A* sorozat a földerítéshez kevés; leadjuk mindhárom *B*-ét is a 25-ös, 43-as és 75-ös mezőkre. Találatunk három víz: két piros nullás és egy fehér egyes. Mindezt a 7.2-es ábrán beírtuk.

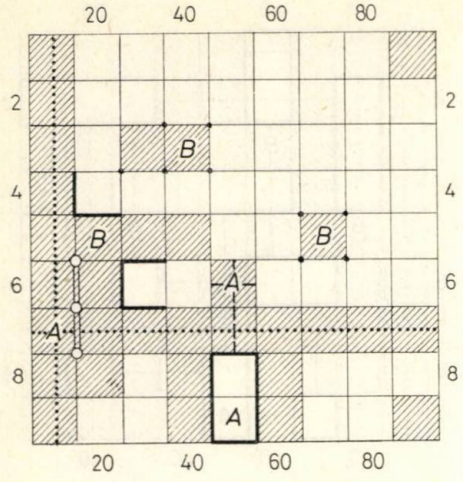
Értékeljük ki a *B*-sorozatot is. Mindegyik *B*-vel vizet találtunk, tehát sraffozhatjuk őket; így a 25-ös víz automatikusan egyesnek adódik, a másik két *B* pedig nullás. Egy csomó hajópontot rajzolhatunk be és 25 hajópontjai két hajómezőt — a 24-est és a 36-ost — is elárulnak. Logikai sorrendben először a 24-es hajómezőt rajzoltuk be, mert a 25-ös bal-felső hajópontja „vízzé" vált volna, ha 24-re vizet teszünk. Ezután a 35-ös víz automatikusan adódik (a hajómezők átlós szomszédjai vízmezők), és így 25 jobb-alsó hajópontja vezet a 36-os hajómezőre. Így jutunk el a 7.3-as ábrához. Az *A* és *B* adatokat kiértékeltük; hogyan tovább?

Persze, kérhetnénk további adatokat a *C* sorozat elhelyezésével, de most már érdemes tovább spekulálni, hátha elegendő adatunk van a földerítéshez. Nézzük a 7.3. ábrán megjelölt 29 és 38 mezőket. Tegyük föl, hogy 29 hajómező; így a 25-ös *B* függőlegesen pirossá válna, ami abszurdum, hiszen kiderítettük, hogy ez a fehér egyes. TEHÁT 29 VÍZ. Ezután tegyük fel, hogy 38 hajó. Ez is abszurdumra vezet, mert így egy 4-es sziget keletkezne, ilyen pedig nincs. TEHÁT 38 IS VÍZ. A hatos sziget kialakult, amit le kell zárni, tehát a 39-es mezőn egy delta van. Eljutottunk a 7.4-es ábráig, ahol már két hajónk kész.

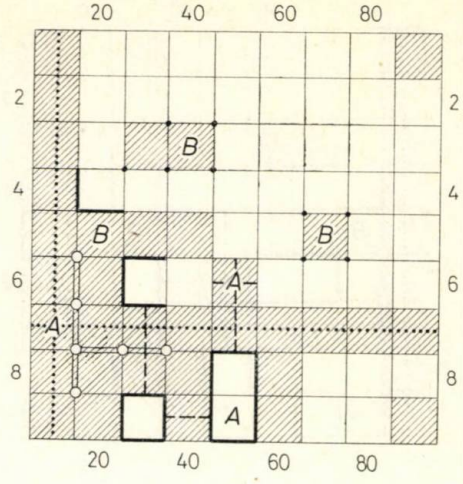
A smyoz-földerítésre jellemző lavina most már elindul. A 36-os hajómező centrumszabály miatt nem maradhat



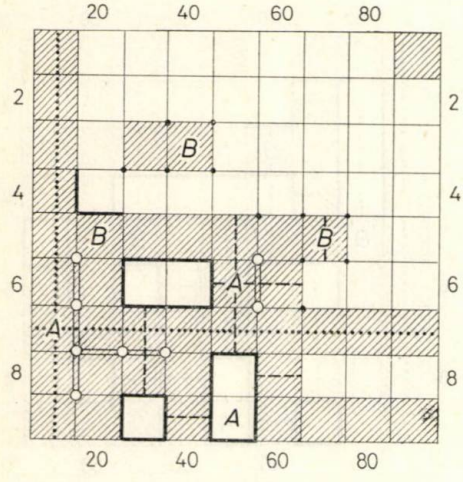
7.2. ábra



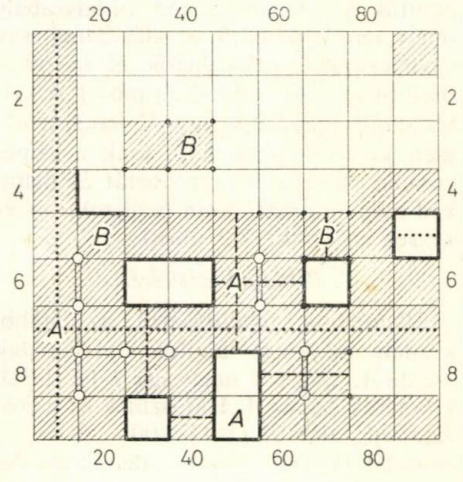
7.3. ábra



7.4. ábra

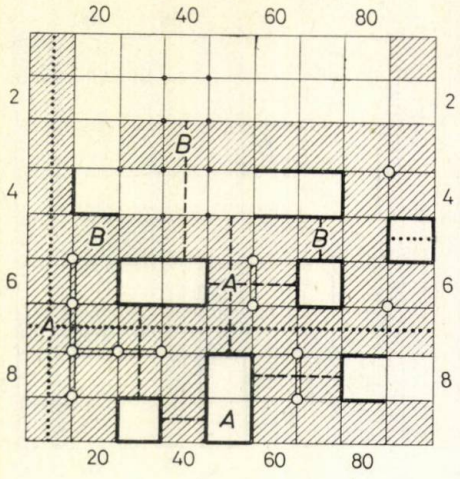


7.5. ábra

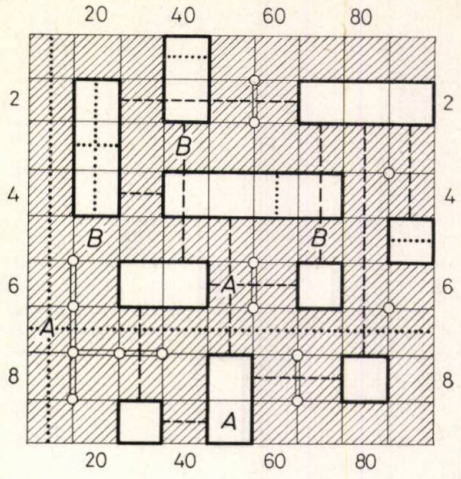


7.6. ábra

delta, tehát 46 is hajó. Kiadódik az 56-os *A* két vízpontja. Az *A*-val talált gamma fehér, tehát a déli parton nincs több hajó és a 8-as sorban piros vonal indul. A kialakult 2-es szigetet hajópontokkal le kell zárni. A 75-ös *B* piros vonala csak függőleges lehet, így jutunk a 7.5-ös ábrához. Itt a 76-os mező a legszembetűnőbb: ez csak hajó lehet. Ezután a 95 is hajó (a *B*-ék ‚kizöldülnének'), a 78 pedig víz, mert a 76-on kiadódott delta ‚kipirulna', piros deltánk pedig nincs. Így jutunk a 7.6-os ábrához, ahol már oly sok a kínálkozó alternatíva, hogy szinte bármelyik mezővel lehetne folytatni. A 74 automatikusan hajó, ugyanígy a 88 is; ezután pedig 93 centrumszabály miatt nem lehet hajó, 64 pedig csúcsszabály miatt nem lehet víz (7.7. ábra). De tovább mehetünk: ugyanígy nem lehet víz 54 és 44 sem — kiadódott az alfa. A 23-as mező már kétszeresen nem lehet víz (csúcsszabály és 43-as *B*), ez tehát dupla-zöld mezőnek adódik, azaz itt csak a dupla-zöld béta lehet. (Ezután 42 automatikusan hajó — ezt a pillanatot rög-



7.7. ábra



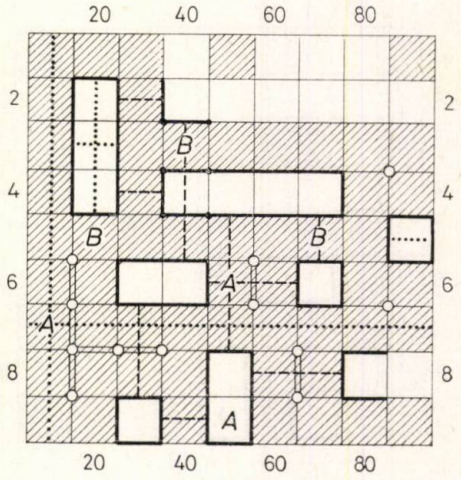
7.8. ábra

zítettük a 7.8. ábrán. 52 oldalszabály miatt nem lehet hajó; az alfa színei csak egyféleképpen helyezhetők el (a 60-as oszlopban zöld, a 70-esben piros). A kettes szigetet lezárjuk, így 72 hajó; a 42-esen kiadódó piros hajó csak a színes gamma lehet, a hiányzó bétát és deltát kell még automatikusan berajzolni — és készen vagyunk. (7.9. ábra).

7. Példa a báziskérésre

Ellenfelünk felállításáról az alábbi kezdeti adatokat kaptuk: vízvonalak száma 1, szigetek nagysága 1-1-2-2-3-3, kikötések száma 4. Hajószínek és merőlegesség: alfa 01, béták 00+ és 01+, gammák 00, 00+ és 00+, delták 00, 00, 01 és 01 (a merőleges hajókat +-szal jelöltük). Az *A* sorozat mindhárom lövését leadjuk és bediktáljuk a 43-as, 55-ös és 47-es mezőket. Találatunk: mindhárom víz, egy fehér nullást, egy duplapiros nullást és egy piros-zöld kettest találtunk el. Úgy érezzük, hogy ez elinduláshoz kevés: bázist kérünk az egyik *A*-ra. Ezt kétféleképpen tehetjük: vagy sorszámával nevezzük meg a kiválasztott *A*-t és megkapjuk találatát, vagy a három találat közül kijelöljük az egyiket és megkapjuk a mező sorszámát.

A 43-as *A*-ra kértünk bázist és a következő információkat kaptuk: ennek

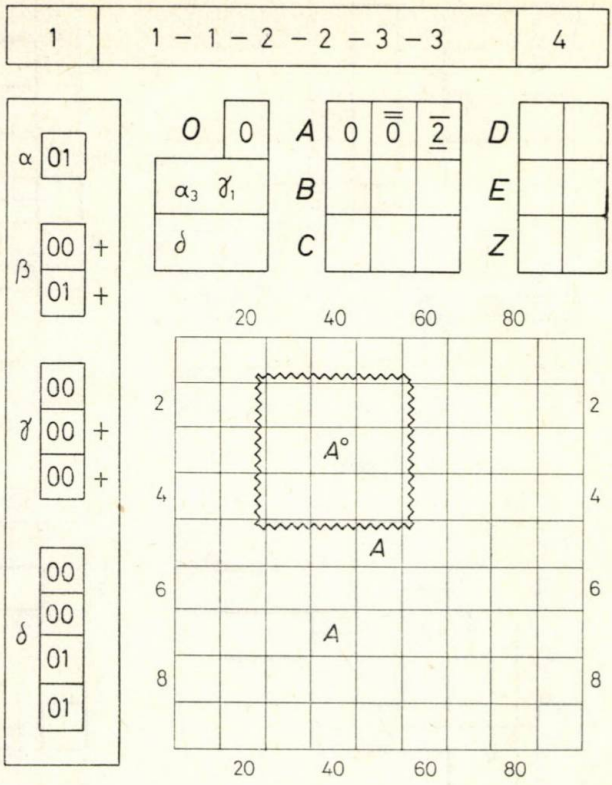


7.9. ábra

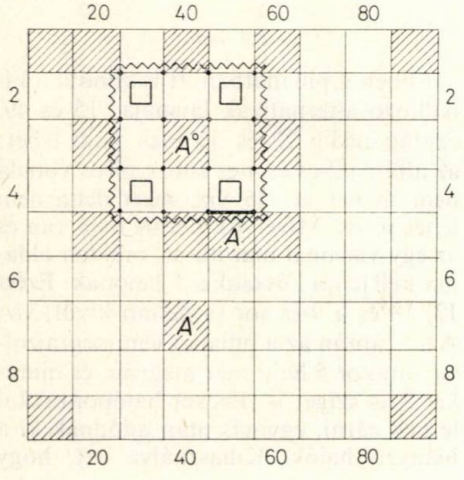
az *A*-nak a találata fehér nullás; a bázisban levő hajók — az alfa három mezővel és mindegyik fehér, az egyik gamma egy fehér mezővel és egy fehér delta; szigetek a bázisban (melyik sziget hány pontja) — nincsenek. Mindezeket az adatokat följegyezve, pillanatnyilag a 8.1-es ábrát látjuk. A bázisinformáció jelentősége az, hogy egyrészt megtudtuk, melyik *A* a fehér nullás, másrészt pedig gazdag információt kaptunk a 43-as középmezejű 3×3-as négyzetről. Tudjuk, hogy ennek mind a tizenhat pontja ha-

jópont. Számoljuk össze: a bázisbeli 3 alfa-mező 8 pontot foglal, a gamma és delta 4-4 pontot; ez összesen éppen 16. Tehát idegen hajó pontja nincs a bázisban: innen rögtön következik, hogy a bázis 4 sarokmezeje hajó. (Ha egy sarokmező víz lenne, akkor ennek egyik pontja nem tartozhatna belső hajómezőhöz!) Mindezt berajzolva, jutunk el a 8.2-es ábrabeli táblához.

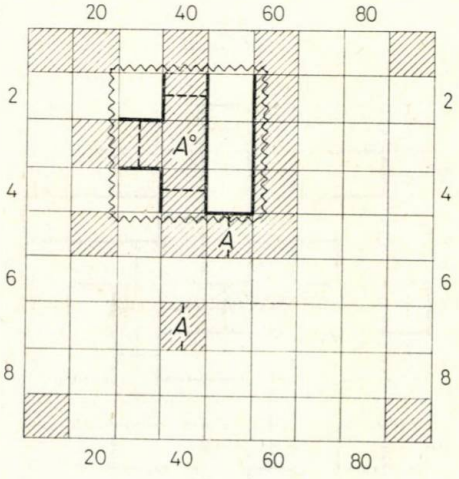
Most már el tudjuk indítani a földerítést. A bázison kívüli két *A*-n két-két színes vonal megy át. Az egyetlen zöld vonal függőleges nem lehet: tehát mind az 55-ös, mind a 47-es mező függőlegesen piros. Ezután 53 nem lehet víz, mert 54 ‚kipirulna': így meg is van mind az 5 bázisbeli hajómező. Eljutottunk a 8.3-as álláshoz. A bázis alfája kinyúlik 51-re; 13 a fehér A° miatt nem lehet hajó; 46 pedig ugyanezért hajó. Ezért az 55 már nem lehet kettes: az *A*-k is adódnak. Így jutunk a 8.4. ábrabeli álláshoz.



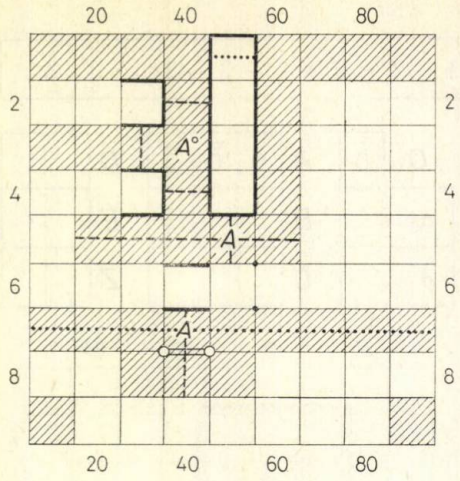
8.1. ábra



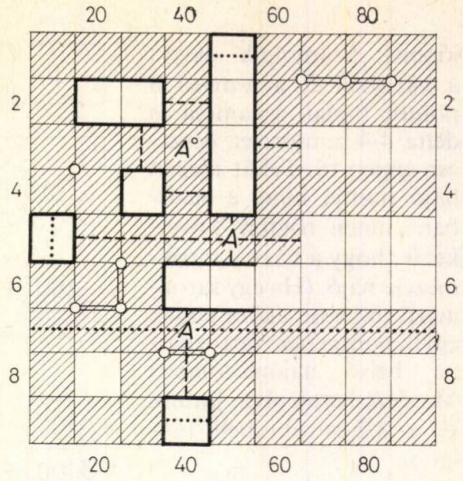
8.2. ábra



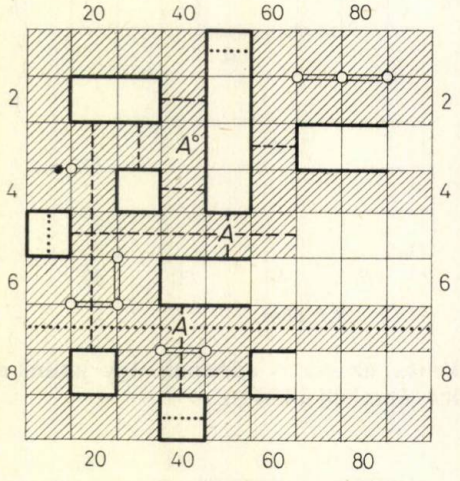
8.3. ábra



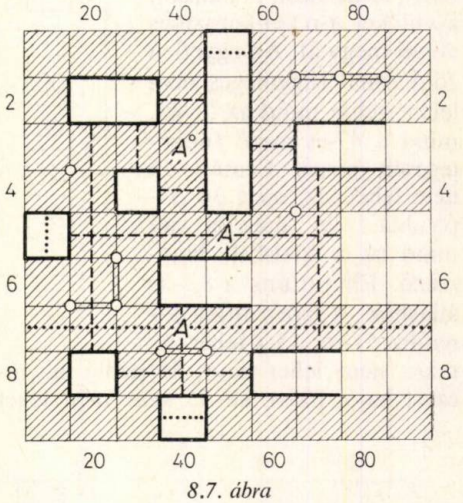
8.4. ábra



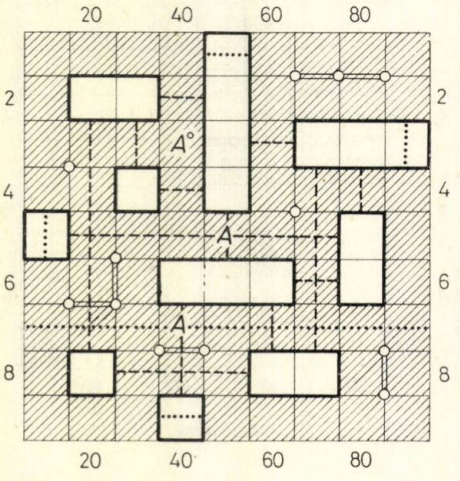
8.5. ábra



8.6. ábra



8.7. ábra



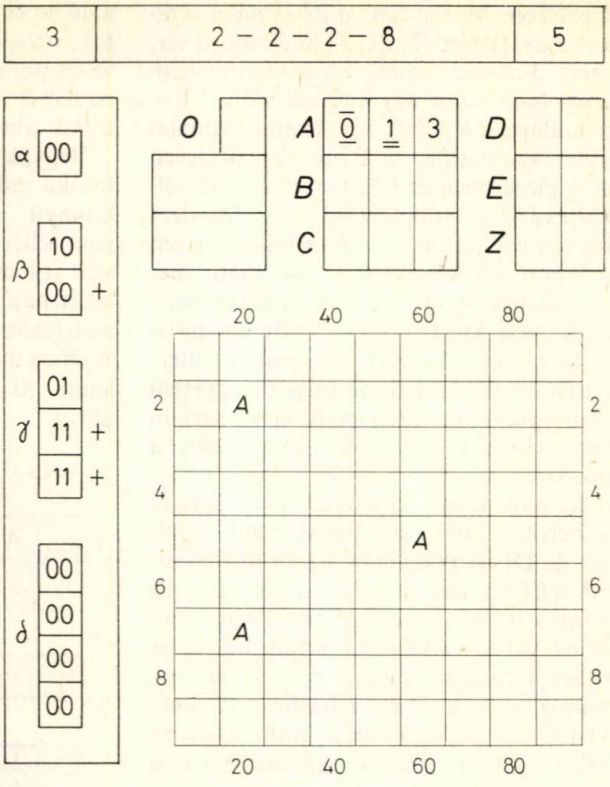
8.8. ábra

Ebben a pillanatban itt is elindul a kínálkozó alternatívák lavinája: 15 és 49, ezután pedig 22 és 56 csak hajó lehet; az alfán a 2-es és 4-es sorok piros vonala nem mehet át. 36 víz, mert delta nem lehet piros. Mivel 4 kikötött hajó van és az egy vízvonal már adott, minden oldalon kell lenni 1 és csakis 1 hajónak. Ezért 12, 18 és a 9-es sor (a deltán kívül) víz. A 8.5. ábrán az a pillanat van megrajzolva, amikor 5 hajó már megvan, és mindkét 3-as sziget is. Ezeket hajópontokkal le kell zárni, egymás után adódnak ki a hiányzó hajók. Kihasználva azt, hogy

nincs több 3-as sziget és nincs piros hajó: könnyen jutunk el a végső megoldáshoz (8.6. ábrától 8.8. ábráig).

8. Rejtvény

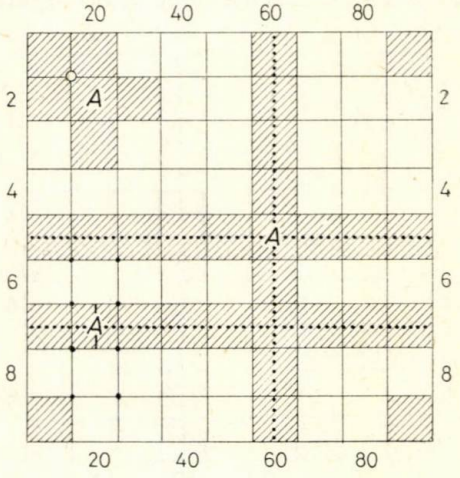
A smyoz rövid történetében (valamikor a 40-es években született) kialakult az a szokás, hogy a kevés információt használó, szép partikat följegyeztük. Azt is megnéztük, hogy apró módosítással nem lehet-e még szebbé tenni ezeket. Így alakult ki a smyozrejtvény-„műfaj", mely abban különbözik a partitól, hogy egy speciális többletinformációt tartalmaz: azt, hogy az adott kevés információ alapján a fölállítás *egyértelműen meghatározott*. Befejezésül erre is adunk egy példát, ami — mint rejtvény is — különlegesen nehéz és szép.



9.1. ábra

A rejtvény adatai: vízvonalak száma 3, a szigetek nagysága 2-2-2-8, a hajószínek és állásuk: alfák = 00, béták = 10, 00+, gammák = 01, 11+, 11+; delták = 00, 00, 00, 00. A vízpontok összes számából (2+2+2+8=14) természetesen kiszámítható az 5 kikötés. Az *A* sorozat három lövése a 22-es, 27-es és 65-ös mezőkre van elhelyezve, és a találat piros-zöld nullás, dupla-zöld egyes és fehér hármas (9.1. ábra).

Ha nem rejtvényről lenne szó, akkor valószínűleg nagyon kevés smyoz-játékos vágna neki a megfejtésnek, még ha nagy rutinnal rendelkezik is. Nehéz fölismerni azt, amit elmondani könnyű: először a 22-es mezőről dönthető el, hogy melyik találat tartozik hozzá. Piros-zöld nullás nem lehet, mert a nullás víz piros vonalával elárult delta kizöldülne: ilyen pedig nincs. Dupla-zöld egyes sem lehet, mert két zöld deltára vezetne a 13-as és 31-es

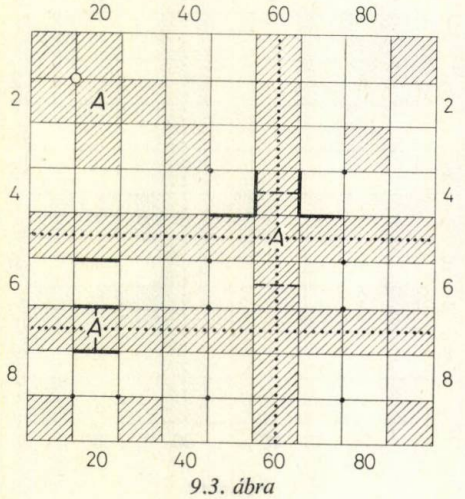


9.2. ábra

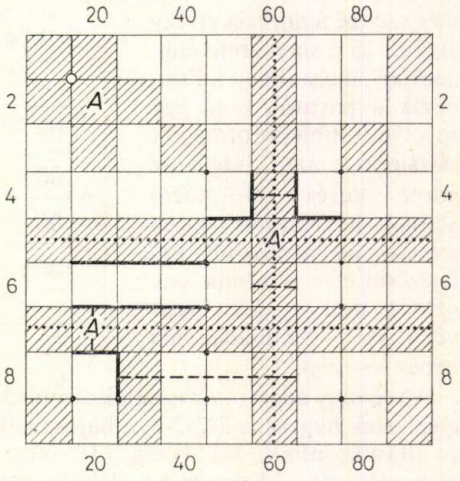
mezőkön. Marad hát: *a 22-es mező a fehér 3-as.* (Ezért 12, 21, 23 és 32 mező víz, mert 3-as víz szomszédos mezeje nem lehet hajó, mert úgy kettessé válna.) Ennek alapján a másik két *A* színes vonalai már rajzolhatók: a 27-es függőlegesen csak piros lehet, ez tehát a piros-zöld nullás; és a 65-ös a dupla-zöld egyes. Mindezt berajzolva jutunk a 9.2. ábrához. Ezen a lapon két könnyen megtalálható mező-alternatíva van: a 26-os és 28-as mező csak hajó lehet (csúcsszabály és piros vonal). Azt a könnyű, (de rejtett) alternatívát is felhasználjuk, hogy 65 egyetlen vízpontja csak valamelyik alsó sarkán lehet (itt két hajópont csúcsszabályba ütközik).

Ezután kissé reménytelennek látszik a helyzet: több alternatíva nem kínálkozik. DE A PONTOKAT IS BECSÜLNI KELL: nézzük meg a 45-ös és 75-ös pontokat. (45-ös pont alatt a 45-ös mező JOBB ALSÓ SARKÁT értjük.) A 11-es pontról tudjuk, hogy a 8-as sziget egy pontja, mert a 22-es *A* hármas. A tábla 11-től távol levő pontjai, mint 45-ös és 75-ös pont is csak kettes szigethez tartozó vízpontok lehetnek, ha egyáltalán vízpontok. Ha viszont 45-ös pont vízpont, azonnal négy összefüggő vízpont keletkezik — tehát 45-ös pont hajópont. Ugyanígy 75-ös pont is. Az már automatikus következmény, hogy velük együtt a 46-os és 76-os pontok szintén hajópontok. Analóg módon találjuk a 48-as és 78-as pontokat. Látjuk azt is, hogy a 66-os mező vízszintesen piros. Így jutunk el a 9.3. ábrához.

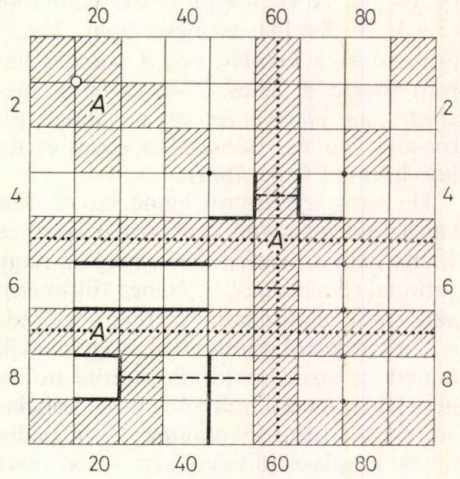
Vegyük észre, hogy pár apró hajópontocska milyen sokat jelenthet. Most már könnyű mező-alternatívát találni: 46 nem lehet víz (piros delta keletkezik), 36 sem (csúcsszabály), ezután pedig 38 nem lehet hajó (oldalszabály). A 47-es pont nem lehet vízpont (3-as sziget keletkezne). A 68-as mező vízszintesen piros (ha fehér lenne, itt is 3-as sziget keletkezne) (9.4. ábra).



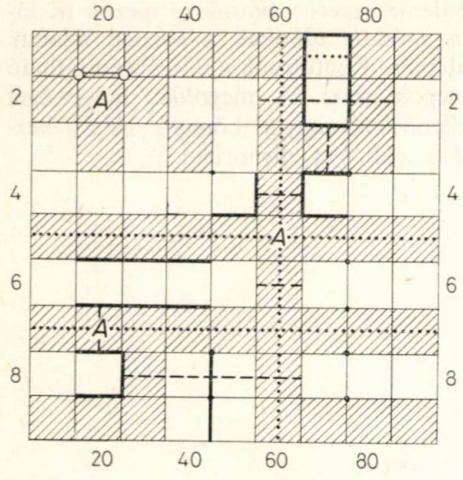
9.3. ábra



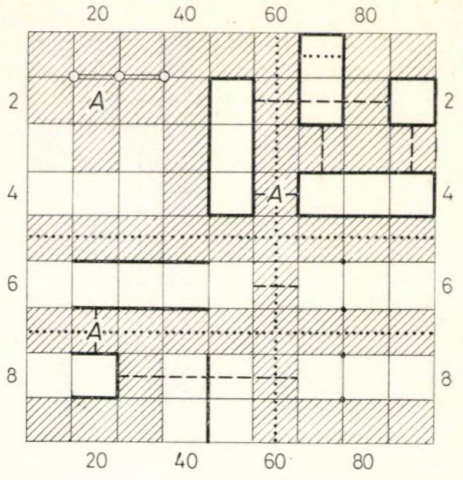
9.4. ábra



9.5. ábra



9.6. ábra

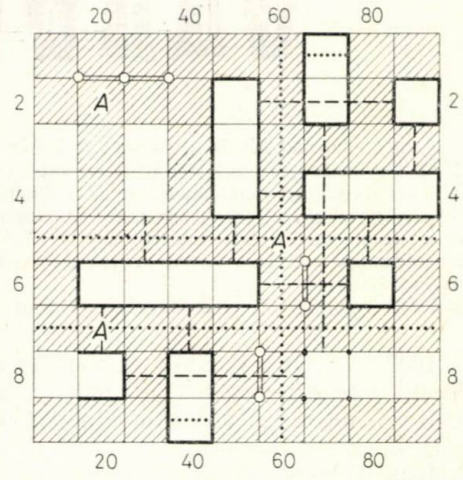


9.7. ábra

A következőkben szükségünk lesz egy elméleti következtetésre, melyre az elért eredmények és a kezdeti adatok egybevetésével jutunk. A megadott 3 vízvonalat a tábla belsejében megtaláltuk (az 5-ös és 7-es sorok és a 60-as oszlop). Tehát minden oldalon van kikötés, melynek elosztása csak 2-1-1-1 lehet. Azaz három oldalon van egyetlen kikötés, ami három zöld hajót jelent. Zöld hajónk viszont összesen csak három van: a három gamma. Következik tehát: A HÁROM GAMMA KI VAN KÖTVE.

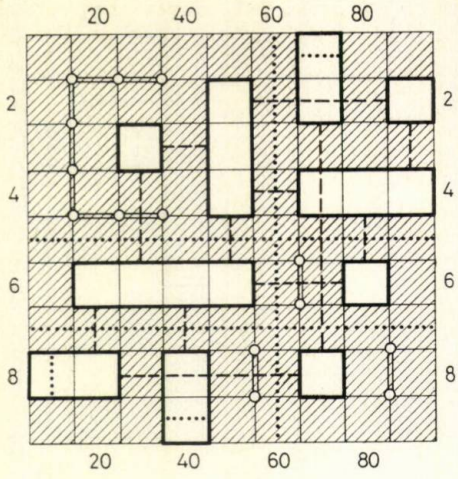
Eddigi eredményeinket a 9.4. ábrán látjuk. A 48-as és 58-as mezők valamelyike piros hajó: ez csak egy kikötött piros gamma lehet — mint a fentiekben megállapítottuk — egyedül kikötve. Mindezt a 9.5. ábrán megrajzolva, állapítsuk meg, hogy egyetlen véglegesen berajzolt hajónk sincs! Ami viszont ezután következik, az egy csodálatos robbanás.

A 47-es és 48-as pontok csak egy piros gammához tartozhatnak. Megtaláltuk a déli parton kikötve a 11-es merőleges gammát. Még van egy ugyanilyen gamma: ez csak az északi parton lehet kikötve. ITT GAMMÁT ÚGY KIKÖTNI, HOGY PIROS LEGYEN, CSAK EGYETLEN HELYEN LEHET: ez a 71-es mező. A 9.6. ábrán ezt is berajzoltuk.



9.8. ábra

Innen tovább: valóban az alternatívák bőségének zavara; szinte akárhova pillantunk alternatíva kínálkozik. A 92-es deltára piros vonal mutat. 84 nem víz (csúcsszabály), és csak béta lehet (úszó gamma nincs). Ugyanígy 53 sem víz, és szintén béta. A 9.7. lapra érkeztünk. A 46-os mező fehér alfa, tehát lefelé piros vonal indul, mely a kikötött gammát árulja el. 56 hajó (a kiadódó 2-es láncot le kell zárni), megvan az alfa, és itt — a 9.8. ábrán látható fázisban — meg is állunk, a logikai láncot tovább fűzni nem



9.9. ábra

érdemes, mert a hátralevő mezők triviális módon adódnak a kezdeti adataik alapján. Eljutottunk a 9.9. ábrán látható megoldáshoz. A megoldás helyességét ellenőrizni nagyon könnyű: elég a kezdeti adatokat ellenőrizni.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc.

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!) A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1047. A k_1 és a k_2 körök egymást az A és B pontokban metszik. A k_1 kör tetszőleges, A és B pontoktól különböző C pontján átmenő CA és CB egyenesek a k_2 kört másodjára E, illetve F pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy EF merőleges a k_1 kör CD átmérőjére!

1048. Határozzuk meg azokat az (a, b) számpárokat, amelyekre az $a^4+a^2b^2+b^4$ prímszám!

Varga István, Nagyszalonta

1049. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\left[\frac{x^2-3x+2}{15}\right]+\left[\frac{x-3x+7}{15}\right]+\left[\frac{x^2-3x+12}{15}\right]=\frac{7x-1}{8};$$

ahol $[A]$ az A szám egész részét jelöli!

Bencze Mihály, Brassó

1050. Legyen $k \geqq 1$, természetes egész! Definiáljuk az (x_n) sorozatot a következőképpen:

$$x_0 = k,\ x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2}, & \text{ha } x_n \text{ páros,} \\ 2x_n+2 & \text{ha } x_n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Jelentse $L(k)$ azt a legkisebb m indexet, amelyre $x_m = 1$! Bizonyítsuk be, $L(k)$ minden pozitív egészre létezik és

$$L(k) < 3 \cdot [\log_2 k] + 7.$$

Bartha Gábor, Szentendre

1051. Legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ egy konvex n-szög szögei, radiánban mérve. Igazoljuk, hogy

$$\prod_{i=1}^{n} \sin \alpha_i < \left(\frac{2\pi}{n}\right)^n.$$

Bíró Béla, Barót

1052. Határozzuk meg azokat az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket, amelyekre

$$f(x) \cdot \left(\cos y + \frac{f(y)}{2}\right) + f(y) \cdot \left(\cos x + \frac{f(x)}{2}\right) - f(x-y) = \sin x \cdot \sin y$$

Cseh László és Merényi Imre, Kolozsvár

Feladatmegoldások (1023—1028)

1023. Melyik az a tízes számrendszerbeli $\overline{abc}$ szám, amely a $\overline{bca}$ és $\overline{cab}$ számok számtani közepe?

Halász Ferencné, Budapest

Megoldás: A feltétel értelmében az a, b, c számjegyekre fenn kell állnia a

$$2(100a + 10b + c) = 100b + 10c + a + 100c + 10a + b,$$

azaz a $7a = 3b + 4c$ egyenlőségnek.

E diofantikus egyenlet általános megoldása az ismert, osztathatóságon alapuló eljárással:

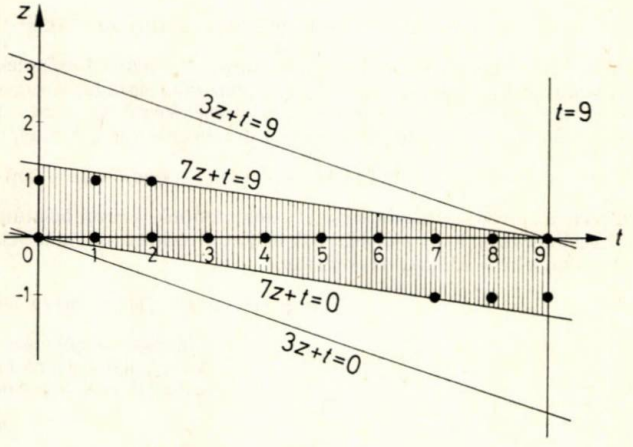
$$a = 3z + t$$
$$b = 7z + t$$
$$c = t,$$

ahol z, t tetszőleges egészek. Feladatunknak csakis azok a t, z egészek tehetnek eleget, amelyekre

$$0 \leqq t \leqq 9,$$

$$0 \leqq 3z + t \leqq 9,$$

$$0 \leqq 7z + t \leqq 9.$$



1. ábra

Az e feltételnek eleget tevő (t, z) számpárok által előállított a, b, c értékek megfelelnek az eredeti követelményeknek (megengedve, hogy e jegyek között a 0 is előforduljon). A fenti feltételnek megfelelő (t, z) párok előállítását a t, z koordináta-rendszerben keressük:

Az ábráról is leolvashatóan, összesen 16 rácspont tartozik az egyenlőtlenségek adta sokszöghöz. Ezek közül a $z = 0$ ordinátájúak a triviális, azonos jegyekből álló $(a = b = c)$ megoldásokat adják. Az ezektől különböző megoldásokat a (0; 1), (1; 1), (2; 1), (7; −1), (8; −1) és a (9; −1) rácspontok szolgáltatják. Az ezekkel előállított számok rendre a következők:

370; 481; 592; 407; 518; 629.

Boda Miklós, Pécs

A megoldók száma: 27.

1024. Bizonyítsuk be, hogy minden m, n pozitív egészre

$$m(m+1)\,n^2(n+1)^2\,(2n^2+2n-1)-n(n+1)\,m^2(m+1)^2\,(2m^2+2m-1)$$

osztható 1440-nel!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: A feladat állítása nem igaz, hiszen az $m=1$, $n=2$ választásra kifejezésünk 720. Azt fogjuk igazolni, hogy a fenti kifejezés minden m, n pozitív egész esetén osztható 720-szal.

Kifejezésünket hozzuk az alábbi alakra:

$$N = m(m+1)\,n(n+1)\,[n(n+1)\,(2n^2+2n-1)-m(m+1)\,(2m^2+2m-1)].$$

Legyen $A=n(n+1)(2n^2+2n-1)$ és $B=m(m+1)(2m^2+2m-1)$. Minthogy $720=2^4\cdot 3^2\cdot 5$, ezért azt fogjuk igazolni, hogy az N a primhatvány tényezők mindegyikével osztható.

1. $2^4|N$, mert $m(m+1)$ és $n(n+1)$ mindig páros, tehát szorzatuk legalább 4-gyel osztható. Az A—B párossága miatt, ha az N első négy tényezőjének valamelyike 4-gyel is osztható, akkor N 16-nak többszöröse. Tegyük fel tehát, hogy $8\nmid m(m+1)\ n(n+1)$. Az $A-B$ kifejezést alakítsuk át:

$$A-B = n(n+1)[2n(n+1)-1]-m(m+1)[2m(m+1)-1] =$$

$$= 2\{[n(n+1)]^2-[m(m+1)]^2\}+m(m+1)-n(n+1) =$$

$$= [n(n+1)-m(m+1)][2n(n+1)+2m(m+1)-1].$$

Feltételünk szerint $m(m+1)$ és $n(n+1)$ egyike sem osztható néggyel, de mert párosak, ezért 4-gyel osztva 2 maradékot adnak, tehát különbségük 4-gyel osztható. Ezért ebben az esetben is $2^4|N$.

2. $3^2|N$, mert $A-B$ mindig 3 többszöröse. Ez nyilvánvaló, mert $3|A$ és $3|B$ teljesül, hiszen ha $3|n$, vagy $3|n+1$ akkor azonnal látható, különben pedig $n=3l+1$ miatt a $2n^2+2n-1=18l^2+18l+3$, ami 3 többszöröse.

Ha tehát N első négy tényezőjének valamelyike 3 többszöröse, akkor $9|N$, máskülönben n és m 3-mal osztva 1 maradékot ad, és így az előbbiek miatt A és B 9-cel osztva 3 maradékot ad, különbségük tehát 9 többszöröse. Ezzel beláttuk, hogy $9|N$.

3. Hátra van még annak igazolása, hogy $5|N$. Evégből N-t kissé átalakítjuk.

$$N = n\cdot m\cdot(n+1)\,(m+1)\,(n-m)\,(n+m+1)\,(2n^2+2m^2+2n+2m-1).$$

Ha n és m valamelyike 5-tel osztható, vagy 5-tel osztva 4 maradékot ad, akkor az N első négy tényezőjének egyike osztható 5-tel. Ha n és m azonos maradékú, vagy összegük 4 maradékú, úgy az ötödik vagy hatodik tényező lesz 5 többszöröse. Végül ha $n=5k+1$, $m=5l+2$, illetve $n=5k+2$, $m=5l+3$ (vagy fordítva), akkor az utolsó tényező osztható 5-tel, mivel

$$[2(n+m)\,(n+m+1)-(1+4nm) = 2n^2+2m^2+2n+2m-1.$$

Ezzel valamennyi lehetséges esetet áttekintettünk, s ezzel beláttuk, hogy $720|N$.

Vizsgáljuk meg, hogy melyek azok az (m, n) számpárok, amelyekre $1440|N$.

Az eddigiekből adódik, hogy ehhez

$$32|n\cdot m\cdot(n+1)\,(m+1)\,(n-m)\,(n+m+1)$$

szükséges és elégséges.

r \ s	0	1	2	3	4	5	6	7
0	*	*	*	*	*	*	*	*
1	*	*					*	*
2	*		*			*		*
3	*			*	*			*
4	*			*	*			*
5	*		*			*		*
6	*	*					*	*
7	*	*	*	*	*	*	*	*

A fenti hat tényező közül pontosan három páros. Mégpedig ha m és n azonos paritású, akkor az

$$m,\quad n,\quad n-m$$

vagy az

$$m+1,\quad n+1,\quad n-m$$

tényezők, ha pedig m és n különböző paritású, akkor az

$$m,\quad n+1,\quad m+n+1$$

vagy az

$$m+1,\quad n,\quad m+n+1$$

tényezők.

Ezek szerint $2^5|N$ akkor és csak akkor, ha a felsorolt három tényező egyike 8 többszöröse, vagy legalább kettő 4-gyel osztható. Az $n-m$ tényező akkor és csak akkor

osztható 8-cal, ha m és n 8-cal való osztási maradéka azonos. Az $m+n+1$ tényező pedig akkor és csak akkor 8 többszöröse, ha $m+n$ 8-cal osztva 7 maradékú. Az előbb felsorolt tényező-hármasok bármelyikében ha két tényező 4-gyel osztható, akkor a harmadik is.

Legyen $m=8k+r$ és $n=8l+s$, ahol $0 \leqq r,\ s \leqq 7$. A fentiekben beláttuk, hogy $1440 \mid N$ akkor és csak akkor, ha az r, s számok az alábbi táblázat $*$-gal jelölt mezőinek valamelyikéhez tartozik.

Giczi Margit, Sümeg, Németh László, Vasvár

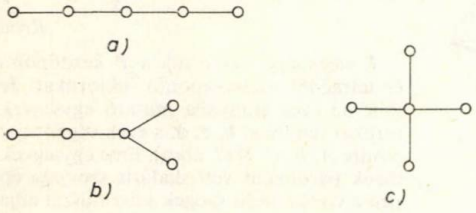
A megoldók száma: 16.

1025. A hat darab szabályos háromszöglap határolta kettős gúla felületét néhány éle mentén felvágva, síkba kiteríthető, *összefüggő* hálózatát kapjuk. Hány különböző (nem egybevágó), összefüggő hálózata van a kettős gúlának és mely élei mentén kell felvágnunk, hogy ezeket a hálózatokat nyerjük?

Megoldás: Tekintsük az alakzat bármely, a síkba kiterített összefüggő hálózatát. Mivel bármely lap élben csatlakozik egy másik laphoz, ezért a hat lap hálózatában pontosan öt vágatlan él van, hiszen szabályos hatszög nem lehet a kettős gúla hálózata, minthogy e testnek nincs még ötödfokú csúcsa sem. Ezek szerint pontosan négy élt kell vágni.

A kiterített hálózat kontúrvonalát ezek a vágott élek adják, éspedig mindegyikük kétszer fordulván elő, hiszen minden él két laphoz tartozik. Mivel a hálózat nem lehet szabályos hatszög, minden lapnak minden csúcsa a kontúron van. Ez azt jelenti, hogy bármely csúcsból bármely csúcsba eljuthatunk vágott élek mentén haladva, vagyis az öt csúcs a vágott élekkel egy négyélű összefüggő gráfot, fagráfot ad.

Könnyű belátni, hogy ötszögpontú fagráf csak az alábbi három típus valamelyike lehet:

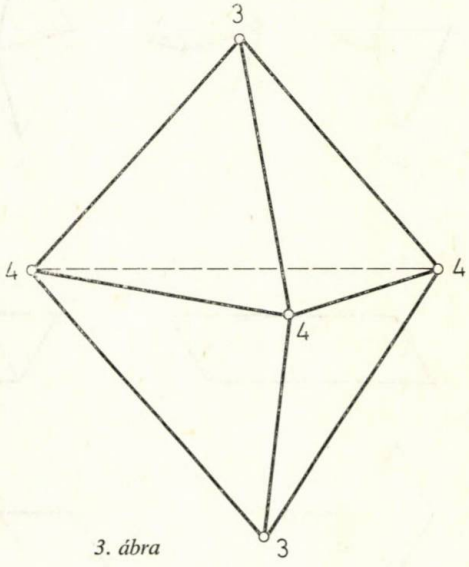


2. ábra

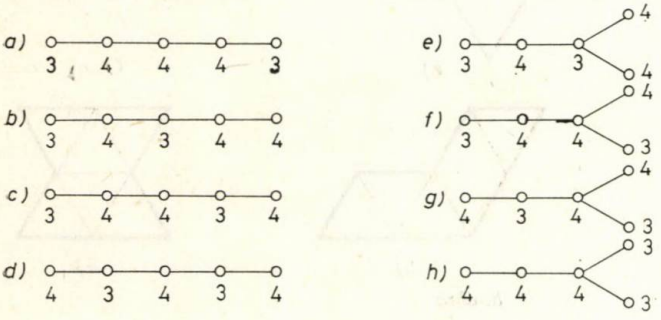
Az alakzat forgásszimmetriájából következik, hogy a *3*, illetve *4* jelű csúcsoknak egymás között nincs kitüntetett szerepe. Legfeljebb annyi hálózata van alakzatunknak, ahány különböző (nem izomorf) módon a két darab 3 és a három darab 4 hozzárendelhető a 2. ábra gráfszögpontjaihoz úgy, hogy *a két 3 jelű csúcsot él nem kötheti össze.*

A 2*a)* ábra gráfjához négyféleképpen rendelhetjük a jeleket, hiszen a végpontok vagy azonos jelűek, és ez esetben egy-egy hozzárendelés van, vagy különböző jelűek, s ekkor két lehetőségünk van (*4. ábra a), b), c), d)*.

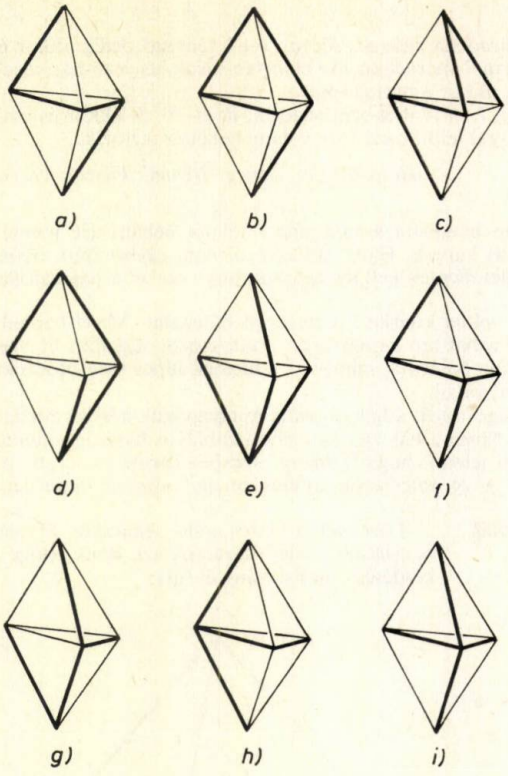
Tekintsük a kettős gúla sematikus ábráját (a csúcsok mellé írt számok azt jelzik, hogy a kérdéses csúcsba hány él fut):



3. ábra



4. ábra



5. ábra

A 2*b)* ábra gráfjához is négy — megkívánt — módon rendelhetjük a 3, illetve 4 jeleket. Ha a harmadfokú csúcs jele a 3, akkor egyetlen hozzárendelés van, különben három (4. ábra *e)*, *f)*, *g)*, *h)*). Végül a 2*c)* ábra negyedfokú csúcsának jele csakis a 4 lehet, így egyetlen hozzárendelésünk van (4. ábra, *i)*).

Az 5. ábra vastag vonalai jelzik a 4. ábra gráfjainak megfelelő vágásokat, míg a 6. ábrán az egyes gráfokhoz tartozó hálózatokat láthatjuk. A *c)* és *f)* hálózatok egybevágóak, így összesen 8 különböző hálózata van a kettős gúlának.

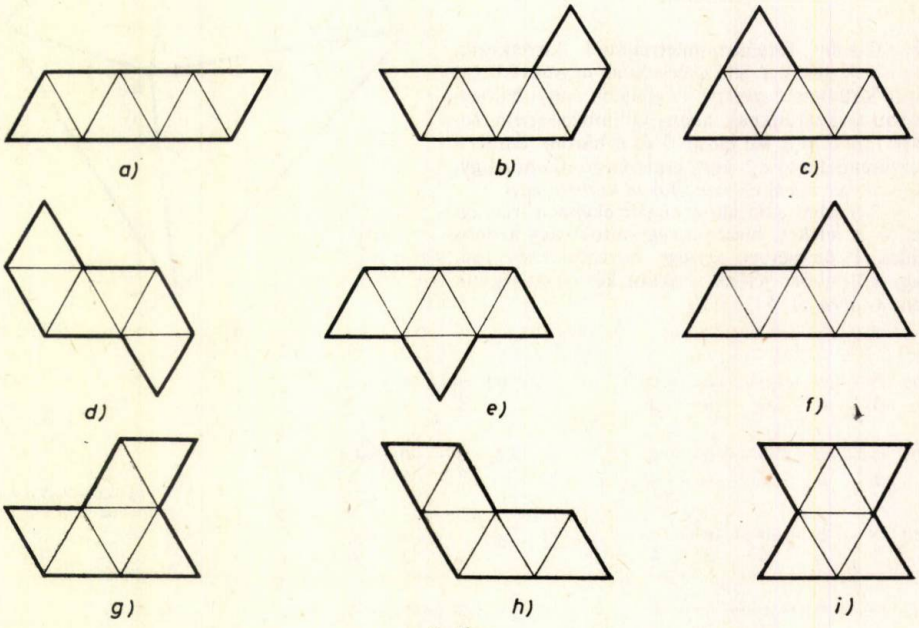
Ambrus Gabriella, Budapest
Bogdán Zoltán, Cegléd

A megoldók száma: 5.

1026. Igazoljuk, hogy egy tetraéder belsejében levő bármely P ponthoz található a tetraédernek egy olyan éle, amely e pontból olyan szög alatt látszik, amelynek koszinusza nem nagyobb mint $-\frac{1}{3}$!

Kvant

I. megoldás: Tekintsük a P kezdőpontú és tetraédercsúcs-végpontú vektorokat. Jelölje az ezek irányába mutató egységvektorokat rendre **a**, **b**, **c**, **d**, s ezek végpontjait rendre A, B, C, D (7. ábra). Eme egységvektorok páronként vett skaláris szorzata éppen a vizsgálandó szögek koszinuszát adja.



6. ábra

Az $ABCD$ tetraéder térfogatát a négy olyan P csúcsú tetraéder térfogatának összegéből is megkaphatjuk, amelynek alapja az $ABCD$ tetraéder egy-egy lapja. Ezért van e tetraéderek között olyan, tudniillik a legkisebb térfogatú, amelynek térfogata az $ABCD$ térfogatának negyedénél nem nagyobb. Legyen ez a $PBCD$ tetraéder. Ennek magassága, vagyis a P pontnak a BCD síktól való távolsága nem nagyobb, mint az A pontnak e síktól való távolságának a negyede. Ebből következik, hogy az AP egyenesnek BCD lappal való közös A' pontjára

$$\frac{PA'}{PA} \leqq \frac{1}{3},$$

hiszen PA' is legfeljebb negyede AA'-nek.
Ezek szerint az ábra **a**, **a'** vektoraira, az

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}'$$

kapcsolatban $\lambda<0$ és $|\lambda| \geqq 3$.
Mivel a **b**, **c**, **d** nem egysíkú vektorok végpontjai adta háromszögre illeszkedik az A', ezért

$$\mathbf{a}' = \beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}+\delta\mathbf{d},$$

ahol $\beta, \gamma, \delta>0$ és $\beta+\gamma+\delta=1$.
Ebből skaláris szorzással rendre

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = \beta+\gamma\mathbf{bc}+\delta\mathbf{bd},$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{c} = \gamma+\beta\mathbf{bc}+\delta\mathbf{cd},$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{d} = \delta+\beta\mathbf{bd}+\gamma\mathbf{cd}.$$

Ezek összegéből

$$\mathbf{a}'(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) = 1+(\beta+\gamma)\,\mathbf{bc}+(\beta+\delta)\,\mathbf{bd}+(\gamma+\delta)\,\mathbf{cd}.$$

Tegyük fel, hogy **bc**, **bd**, **cd**, mindegyike nagyobb, mint $-\frac{1}{3}$! Ekkor

$$\mathbf{a}'(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) > 1-\frac{1}{3}(2\beta+2\gamma+2\delta) = \frac{1}{3},$$

ezt $\lambda<0$-val szorozva

$$\lambda\mathbf{a}'(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) < \frac{\lambda}{3},$$

de $\lambda\mathbf{a}'=\mathbf{a}$, $|\lambda|\geqq 3$ miatt

$$\mathbf{ab}+\mathbf{ac}+\mathbf{ad} < \frac{\lambda}{3} \leqq -1,$$

ami azt jelenti, hogy a fenti tagok mindegyike nem lehet $-\frac{1}{3}$-nál nagyobb. Ebből pedig állításunk következik, hiszen ha például

$$\mathbf{ab} \leqq -\frac{1}{3},$$

akkor $\mathbf{ab}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})\leqq -\frac{1}{3}$,
mert $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$.

Bogdán Zoltán, Cegléd

II. megoldás: Az előbbi megoldás jelöléseivel, egy P közepű, egységsugarú gömbfelületen négy gömbháromszöget nyerünk. Ezek között van olyan, amelynek felszíne legalább akkora, mint az egységsugarú gömb felszínének negyede. Jelölje eme gömbháromszög oldalait és szögeit rendre **a**, **b**, **c**, α, β, γ!
E gömbháromszög felszíne tehát

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi \geqq \frac{4\pi}{4}, \quad \text{azaz}$$

$$(*) \qquad \alpha+\beta+\gamma \geqq 2\pi, \quad \text{ahol } 0<\alpha, \beta, \gamma<\pi.$$

Feltehetjük tehát, hogy α nem kisebb a többinél, és ezért $\alpha \geqq \frac{2\pi}{3}$ és $\cos\alpha \leqq -\frac{1}{2}$.

Azt fogjuk bizonyítani, hogy $\cos a \leqq -\frac{1}{3}$. Indirekt okoskodunk, tegyük fel, hogy $\cos a > -\frac{1}{3}$.

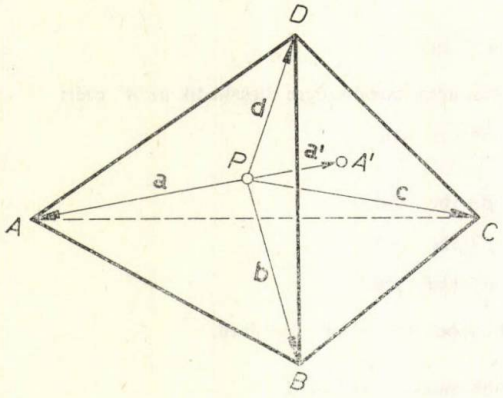
Felírva a szögekre vonatkozó cosinus-tételt:

$$-\frac{1}{2} \leqq \cos\alpha = -\cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a.$$

Felhasználva, hogy $\sin\beta \cdot \sin\gamma > 0$, az addíciós összefüggésekből és indirekt feltételünkből:

$$-\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}(\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)) - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)),$$

azaz $\quad 1 < \frac{2}{3}\cos(\beta+\gamma)+\frac{4}{3}\cos(\beta-\gamma).$



7. ábra

Mivel $\beta, \gamma \leqq \frac{2\pi}{3}$ és $\alpha < \pi$ ezért $(*)$-ból

$\pi \leqq \beta+\gamma \leqq \frac{4\pi}{3}$, azaz $\cos(\beta+\gamma) \leqq -\frac{1}{2}$.

Ezt előbbi relációnkban felhasználva

$$1 < -\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\cos(\beta-\gamma),$$

vagyis $\quad 1 < \cos(\beta-\gamma)$

adódik, ami lehetetlen, így valóban $\cos a \leqq -\frac{1}{3}$.

Németh Zoltán, Szeged

A megoldók száma: 2.

1027. Tekintsük az $F_1=F_2=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ módon definiált Fibonacci-sorozatot. Konvergens-e a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}{n\cdot F_n^2}$$

sor?

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: Mivel $F_{n+1} > F_n$ $(n \geqq 2)$ és $F_n < 2F_{n-1}$, ezért az

$$a_n = \frac{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}{n\cdot F_n^2} > \frac{F_{n-1}\cdot F_n}{n\cdot F_n^2} = \frac{F_{n-1}}{n\cdot F_n} > \frac{F_n}{2nF_n} = \frac{1}{2n},$$

tehát

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}{nF_n^2} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

A $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens, ezért ennek majoránsa, a $\sum a_n$ is.

Ambrus Gabriella, Budapest

A megoldók száma: 18.

1028. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\frac{5}{4}-\cos x\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{2^k} \leqq \frac{1}{4}+\frac{3}{2^{n+2}}$$

minden valós x-re és n természetes egészre!

Bíró Béla, Baróth

I. megoldás: Vezessük be a következő jelölést:

$$S_n = \sum_{k=1} \frac{\cos kx}{2^k}.$$

Az egyenlőtlenség bal oldalát alakítsuk át az addíciós összefüggés felhasználásával:

$$\left(\frac{5}{4}-\cos x\right) S_n = \frac{5}{4} S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos x \cdot \cos kx}{2^k} =$$

$$= \frac{5}{4} S_n - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\cos (k+1)x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^2} \frac{\cos (k-1)x}{2^{k-1}} \right) = \frac{5}{4} S_n - \left(S_n - \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos (n+1)x}{2^{n+1}} \right) -$$

$$- \frac{1}{4} \left(S_n + \frac{\cos 0 \cdot x}{2^0} - \frac{\cos nx}{2^n} \right) = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos nx}{2^{n+1}} - \frac{\cos (n+1)x}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}.$$

Ezért feladatunk állítása a következő:

(1) $$\frac{\cos x}{2} + \frac{\cos nx}{2^{n+2}} - \frac{\cos (n+1)x}{2^{n+1}} - \frac{1}{4} \leqq \frac{1}{4} + \frac{3}{2^{n+2}}.$$

Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat: Szorozzuk meg az egyenlőtlenséget 2^{n+2}-nel, majd adjunk hozzá 2^n-t. Ekkor

(2) $$2^{n+1} \cos x + \cos nx - 2 \cos (n+1)x \leqq 2^{n+1} + 3.$$

Mivel $-1 \leqq \cos \alpha \leqq 1$ minden α-ra, ezért

$$2^{n+1} \cos x + \cos nx - 2 \cos (n+1)x \leqq 2^{n+1} + 1 + 2 = 2^{n+1} + 3.$$

Az ekvivalens átalakítások miatt (2) akkor és csak akkor áll, ha (1) is igaz, márpedig (2) mindig teljesül. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Polcz Katalin, Pécs

II. megoldás: A feladatot általánosítjuk, s ezt oldjuk meg. Legyen $k \geqq 2$, akkor

$$\frac{k^2 - 2k \cdot \cos x + 1}{k^2} \sum_{p=1}^{n} \frac{\cos px}{k^p} \leqq \frac{k-1}{k^2} + \frac{k+1}{k^{n+2}}$$

minden valós x-re és n természetes egészre.

Bizonyítás: Az előbbi megoldásban alkalmazott átalakításokkal és $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\cos px}{k^p}$ jelöléssel

$$\frac{k^2 - 2k \cdot \cos x + 1}{k^2} \sum_{p=1}^{n} \frac{\cos px}{k^p} = \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) S_n - \sum_{p=1}^{n} \frac{2 \cos x \cdot \cos px}{k^{p+1}} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) S_n - \sum_{p=1} \frac{\cos (p+1)x + \cos (p-1)x}{k^{p+1}} = \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) S_n - \left(S_n \frac{\cos x}{k} + \frac{\cos (n+1)x}{k^{n+1}} - \right.$$

$$- \frac{1}{k^2} \left(S_n + \frac{\cos 0x}{k^0} - \frac{\cos nx}{k^n} \right) = \frac{\cos nx + k^{n+1} \cos x - k \cdot \cos (n+1)x}{k^{n+2}} - \frac{1}{k^2} \leqq$$

$$\leqq \frac{1 + k^{n+1} + k}{k^{n+2}} - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k^2} + \frac{k+1}{k^{n+2}},$$

és ezt kellett igazoljuk.

Bencze Mihály, Brassó

Megjegyzés: Hasonlóan igazolhatjuk, hogy ha $k \geqq 2$, akkor

$$\frac{k^2 - 2k \cdot \cos x + 1}{k^2} \sum_{p=0}^{n} \frac{\sin px}{k^p} \leqq \frac{k-1}{k^2} + \frac{k+1}{k^{n+2}}.$$

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 12.

A megoldók névsora (1023—1028)

Ambrus Gabriella, Budapest (1023—1025., 1027.); Bagi Gábor, Barcs (1023.); Bencze Mihály, Brassó (1023., 1024., 1027., 1028.); Boda Miklós, Pécs (1023.); Bogdán Zoltán, Cegléd (1023—1025., 1026. 2 mód, 1027., 1028.); Borsovszky Rudolf, Budapest (1023.); Cseh László, Kolozsvár (1023., 1024., 1027., 1028.); Földeák Árpád, Budapest (1023.); Giczi Margit, Sümeg (1023., 1024.); Hajdú Ferenc, Nagykálló (1023.); Hárspatakyné Dékány Vera, Budapest (1025.); Honti Dénes, Győr (1023.); Kondor Judit, Budapest (1027.); Kondor László, Dunaújváros (1023., 1027.); Major

Piroska, Budapest (1023., 1024.); Merényi Imre, Kolozsvár (1023., 1024., 1027., 1028.); Molnár Lászlóné, Budapest (1023—1025.); Nagy Ferenc, Hajdúnánás (1027.); Nagy-Imecs Vilmos, Székelyudvarhely (1023., 1024., 1028.); Németh László, Vasvár (1023., 1024.); Németh Zoltán, Szeged (1026., 1027.); Nyírő László, Mezőkövesd (1027., 1028.); Oláh György, Rév-Komárom (1023.); Olláry Péter, Komárom (1023.); Pataki János, Szatmár (1023., 1027.); Polcz Katalin, Pécs (1023—1025., 1027., 1028.); Rischákné Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (1023.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1023.); Sebestyén László, Budapest (1027.); Szabó Kálmán, Miskolc (1023., 1024., 1027., 1028.); Szánthó Gyula, Gyula (1023., 1024., 1027., 1028.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1024., 1027., 1028.); Varga István, Nagyszalonta (1027., 1028.); Zalán Péterné, Budapest (1023., 1024.); Zsidó György, Kolozsvár (1023., 1027.).

Könyvesbolt érdekes szolgáltatással

Miskolcon, a Nehézipari Műszaki Egyetem 95. számú boltja a jövőben nemcsak az újonnan megjelenő matematikakönyvek széles választékát kínálja, hanem régebbi kiadású matematikai könyvekkel is szolgál az érdeklődő olvasóknak. Régóta megoldatlan kérdés volt, hogy az időtálló szakmai könyvek a boltok raktározási gondjai miatt hozzáférhetetlenné váltak. Most a Művelt Nép Könyvterjesztő Vállalat és a Bolyai János Matematikai Társulat Könyvbizottsága együttműködésének eredményeként az országban raktárakban szétszórtan heverő könyveket egy helyen gyűjtötték össze. A könyvesbolt — új szerepének megfelelően — Fejér Lipótról, nagy matematikusunkról kapta nevét. Az ünnepélyes megnyitót a Műszaki és Közgazdasági Könyvnapok keretében f. évi október 18-án tartották.

Ízelítőül néhány cím az összegyűjtött, viszonylag nagy példányszámú könyvek közül:

1979-ben megjelent könyvekből:
— Bakos Tibor (szerk.): Középiskolai matematikai versenyek (TK),
— Hámori Miklós: Relációk (TK),
— Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek (MK),
— Weaver, Warren: Szerencse kisasszony (G).

1980-ban megjelent könyvekből:
— Bognár—Nemetz—Tusnády: Ismerkedés a véletlennel (TK),
— Chinn W. G.—Steenrod N. E.: Bevezetés a topológiába (G),
— Frege, Gottlob: Logika, szemantika, matematika (G),
— Kazarinoff, N. D.: Geometriai egyenlőtlenségek (G),
— Pólya—Szegő: Feladatok és tételek az analízis köréből I. kötet (TK),
— Sain Márton: Matematikatörténeti ABC (TK),
— Vargha—Dimény—Loparits: Nyelv—Zene—Matematika (RTV—Minerva).

1981-ben megjelent könyvekből:
— Bereznai—Varecza: Tanárképző főiskolák matematikai versenyei II. kötet (TK),
— Csengeri Pintér Péter: Mennyiségek, mértékegységek, számok, SI (MK),
— Gáll Éva: Matematikaország határán (TK),
— Halmos—Sigler: Elemi halmazelmélet. Halmazelméleti feladatok (MK),
— Kólya Dániel: Ábrázoló geometriai példatár (MK),
— Kósa András: Ismerkedés a matematikai analízissel (MK),
— Pólya—Szegő: Feladatok és tételek az analízis köréből II. kötet (TK),
— Radnainé Szendrei Julianna: Kivi és apó (TK).

Érdeklődni, illetve rendelni a bolttól postán keresztül lehet.
Cím: Miskolc, Nehézipari Műszaki Egyetem „Fejér Lipót" Könyvesbolt; 3515

TK Tankönyvkiadó,
MK Műszaki Könyvkiadó,
G Gondolat Könyvkiadó.

Ára: 5,50 Ft

INDEX: 25 565